الهندسة اللاإقليدية
أو
قصة
تحرير الفكر الرياضى وإنطلاقه

تأليف

دكتورة
معصومة محمد كاظم
أستاذة تعليم الرياضيات
كلية البنات - جامعة عين شمس

دكتور
وليم تاوضروس عبيد
أستاذ تعليم الرياضيات
كلية التربية - جامعة عين شمس

الطبعة الأولى
١٩٩٣

دار النهضة العربية
٣٢ شارع عبد الخالق ثروت - القاهرة
تليفون : ٣٩٢٦٩٣١

محتويات الكتاب

الموضوع	صفحة

صفحة	الموضوع

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمــة

تتميز الرياضيات في عصرنا هذا بخواص عدة ، منها الديناميكية والاتجاه نحو التعميم والتجريد والتوسع في مجالات تطبيقاتها فى الميادين المختلفة .

وعلم الهندسة من العلوم الأساسية التى بدأت جذورها فى مصر منذ آلاف السنين ، ومنها انتقلت إلى اليونان وغيرها من البلدان ، ثم تفرعت إلى فروع كثيرة . ففى القرن السابع عشر ظهرت الهندسة التحليلية والهندسة الاسقاطية . وفى أوائل القرن التاسع عشر قامت ثورة في علم الهندسة باكتشاف الهندسات اللاإقليدية ، ولم يكن إكتشاف هذه الهندسات عن طريق الحواس ، بل كان ذلك نتيجة التفكير المنطقى ونظام المسلمات وطرق البرهنة .

وموضوع هذا الكتاب هو الهندسات اللاإقليدية ودورها فى تحرير الفكر الرياضى من معتقدات لاتزال راسخة فى العقول مثل حقيقة الرياضيات المطلقة ، وفيما قدمه إقليدس من مفاهيم وحقائق وخواص هندسية ، هذا التحرر الفكرى الذى أدى إلى إنطلاق الرياضيات إلى آفاق أكثر تقدما ونضجا أدى إلى وصول الإنسان إلى القمر .

يتناول **الفصل الأول** من هذا الكتاب بداية علم الهندسة ثم مساهمات إقليدس فى تنظيم المعرفة الرياضية فى نسق منطقى ، ثم إشكالية مسلمة التوازى ، ومحاولات البرهنة عليها منذ عصر إقليدس إلى ظهور الهندسات اللاإقليدية .

أما **الفصل الثانى** فيتناول إكتشاف الهندسات اللاإقليدية والعلماء الذين ساهموا فى هذا الاكتشاف .

ويتناول **الفصل الثالث** أمثلة لنظريات فى الهندسة الزائدية (اللوباتشفسكية) والناقصية (الريمانية) بشىء من التبسيط والإيجاز .

أما **الفصل الرابع** فيتناول قضية فلسفية وهى أى الهندسات الثلاث صحيح؟ الإقليدية أم الزائدية أم الناقصية ؟

وينتهى الكتاب **بالفصل الخامس** ، وهو يناقش إمكانية تدريس الهندسات اللاإقليدية ، وهل من الأفضل أن تكون من بين مناهج رياضيات التعليم العام أم كليات العلوم وكليات التربية (إعداد المعلم) مع إعطاء إطار عام لوحدة مقترحة فى الهندسات اللاإقليدية .

وعلى العموم نأمل أن يكون هذا الكتاب بإذن الله اضافة جيدة للمكتبة العربية حيث أن الكتب العربية لم تتطرق لهذا الموضوع للآن الا بقدر صغير .

والله نسأل أن يوفقنا إلى ما فيه الخير

المؤلفان

الفصل الأول

الجذور : بداية علم الهندسة

طبقا للمؤرخ الأغريقى " هيرووددت " نشأت الهندسة فى مصر ، وكانت نشأتها متجسدة فى قياس الأرض وتثبيت الحدود والتخوم اللازمة والتى فرض وضعها الفيضانات المتكررة لنهر النيل · ولقد بدأت أولا بحقائق متفرقة نجمت عن مشاهدات وخبرات ، وعن قواعد تقريبية لحسابات مساحات وحجوم لبعض الأشكال الهندسية ، نقد كان الاهتمام الرئيسى للمصريين منصبا على النواحى العملية والتطبيقية بحثا عن نتائج تفيدهم فى القياس والبناء والتشييد وتقسيم الأراضى وغير ذلك من الأنشطة الحياتية · ورغم عدم وجود " نظريات " أو " مبرهنات " بالمعنى المعروف حديثا ، إلا أن دقة الأعمال وتكرارها " تشير إلى وجود بعض التعميمات حتى ولو لم تكن مصاغة بصورة صريحة أو مُثبَتة " ، وعلى سبيل المثال نجد أن انشاء الزاوية القائمة باستخدام ٣ ، ٤ ، ٥ من المسافات المتساوية تصنع بواسطة عقد فى حبل أو خيط يثنى على شكل مثلث أدى إلى ما عُرف فيما بعد بنظرية فيثاغورس · كما أن ايجاد مساحة الدائرة باستخدام قانون مكافئ للتعبير الرمزى م = (ق − $\frac{١}{٩}$ ق)^{٢} حيث ق قطر قطعة أرض دائرية وضعهم على عتبة القانون المعروف لمساحة الدائرة م = ط نق٢ حيث اعتبروا القيمة التقريبية = $\frac{٢٥٦}{٨١}$ = ٣ر١٦٠٠٠ بديلا للعدد ط وهى قيمة قريبة جدا من القيمة التقريبية المستخدمة حاليا وهى ٣ر١٤ ·

وقد كان بناء الأهرامات برهانا بصريا محسوسا مجسما للكفاءة الرياضية عند المصريين القدامى · كذلك عرف المصريون كيفية إيجاد حجم الهرم الرباعى القاعـــدة (وبالتحديد الذى قاعدته على شكل مربع) كما يأتى :

الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع ٠

ومساحة القاعدة المربعة = مربع طول ضلعها ٠

كذلك حسبوا عدداً نطقوه كما تنطق كلمة سايكت (Sayket) والذى يقابل النسبة بين نصف طول ضلع القاعدة وإرتفاع الهرم والذى نطلق عليه حديثا (ظتا زاوية ميل الحرف الجانبى للهرم) ٠ وفى حسابهم لحجم هرم ناقص ما يشير الى أنهم توصلوا الى القاعدة المعروفة ، ولكن دون تعليل لذلك ٠ وهذه القاعدة هى :

حجم الهرم الناقص = $\frac{١}{٣}$ ع (أ^{٢} + ب^{٢} + أ ب) حيث ع الإرتفاع ، أ ، ب طولا ضلعى القاعدتين المتوازيتين المربعتين ٠

كما ظهر فى بردية أحمس بعض المسائل التى يشير حلها الى أنهم توصلوا الى قاعدة لحساب مجموع متتالية حسابية ، كان حدها الأول ٧ وأساسها ٧ ، ومن الطريف أنهم استخدموا كلمات مثل منازل وقطط وفئران ٠٠٠ للدلالة على قوى العدد ٧ ٠

وينسب الفضل لطاليس (٦٤٠ – ٥٤٦ ق٠م) فى تقديمه هندسة المصريين للإغريق ٠ كان طاليس (أحد حكماء الاغريق السبعة) تاجرا يسافر براً إلى بابل وبحراً إلى مصر حيث كان يقضى وقتاً طويلاً هناك ٠ ويحكى أنه أدهش الملك المصرى " أمازيس " بأنه استطاع أن يحدد ارتفاع الهرم من خلال قياس طول ظله ٠ وطبقا لهذه الرواية ، فقد وضع طاليس عصا رأسية على الأرض بجوار الهرم ، وإنتظر حتى أصبح طول ظل العصا مساويا لطول العصا نفسها ٠ ومن ثم كان طول الهرم مساويا لطول ظله ٠ وبقياس طول ظل الهرم حدد طاليس الارتفاع الفعلى للهرم ٠

وقد حاول طاليس أن يضع أسسا منطقية للنظريات الهندسية التى كانت متوفرة حينئذ. ولكنه لم يكوّن نظاماً كاملاً من النظريات والبراهين ويقول بروكلوس Proclus أن طاليس أحضر الهندسة إلى الأغريق من مصر ، وكان مهتماً بخصائص الأشكال الهندسية أكثر من اهتمام المصريين بها حيث كان جل اهتمام المصريين منصبا على القياسات والعمليات الحسابية لأغراض تطبيقية عملية بحتة . وفى عهد فيثاغورس (٥٧٠ - ٥٠٠ ق.م) بدأت الهندسة تقدمها على أيدى أتباعه ولاحقيهم من الأفلاطونيين ، وكما يقول بروكلوس Proclus أن فيثاغورس هو أول من طبع الهندسة بطابعها الحالى المنطقى . وهو أول من رتب النظريات الأساسية ترتيبا منطقيا منظماً. وفى حوالي ٤٥٠ ق.م بدأت تظهر سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعاريف معروضة عرضا منطقياً متصلاً . وأشهر تلك المحاولات كانت بلا شك ما قدمه إقيلدس (حوالى ٣٠٠ ق.م) ، الذى نال شهرة عظيمة ومكانة كبيرة بالدرجة التى اكتسب معها شهرة أنه معصوم من الخطأ ، وكانت تلك الشهرة سبباً فى أنهـا - فى أزمنة متأخرة - وقفت حاجزاً ضد تقدم وتطور علم الهندسة كعلم استنباطى . حيث نجد رياضياً مثل عمر بن الخيام (فى القرن الثانى عشر الميلادى) يقف على عتبة الفروض الثلاثة التى كان قبولها سيؤدى إلى التسليم بمسلمات أخرى مختلفة عن مسلمة إقليدس للتوازى ، ولكنه لثقته الكبيرة فى حكمة إقليدس وعدم امكانية خطئه جعله برفض القبول بغير مسلماته كاملة ومحاولته البرهنة على هذه المسلمة الشهيرة اشتقاقاً من الأربع مسلمات السابقة لها . والواقع أن الكثيرين حاولوا البرهنة على مسلمة إقيلدس الخامسة هذه . ولكن ما هى مسلمة التوازى عند إقليدس ؟ وما هى البنية المنطقية التى وضعها إقليدس فى كتابه الشهير (The Elements) ؟ والذى

ترجم إلى العربية تحت عنوان " **الأصول** " فى عصر الدولة العباسية .

إقليدس وبناء وتنظيم المعرفة الرياضية :

وضع إقليدس أول نظام رياضى منطقى فى تاريخ العلم ، حيث نظم المفاهيم والخواص الهندسية التى استلهمها من الفراغ الفيزيائى وتلك التى اكتشفها أو صاغها كثيرون من الرياضيين والممارسين العمليين من قبله ، ونظم كل ذلك فى تتابع منطقى ذى نسق متآلف – مستندا إلى مجموعة من المبادئ العامة والبديهيات " الواضحة " المقبولة حسًا ، وبانياً خاصية تلو الأخرى بالبرهان والمنطق ، متفقاً فى ذلك مع كل من أفلاطون وأرسطو . حيث نجد أفلاطون يقول : " يمكن أن تكتسب المعرفة الرياضية عن طريق التعليل والبرهنة فقط ... لذلك ينبغى ألا نستنتج خواص هندسية من الشكل . إذ ينبغى أن نحصل على الخواص الهندسية من برهان سليم (صحيح) ... أى من برهان لايستند إلى الشكل المرسوم " . ويقول أرسطو : " عند بناء نظام رياضى ينبغى أن نبدأ من مبادئ عامة (Common Notions) يستند إليها كل أنواع التفكير الاستنباطى (الاشتقاقى) (deductive). وقبل وبعد ذلك ينبغى أن نبدأ من مبادئ خاصة (Special Notions) ، التى نسلم فيها بالمفاهيم الأساسية أو التى يوضع لها معان . وأخيراً ينبغى أن نُعَرِّف المفاهيم الأخرى بإرجاعها الى مفاهيم كبرى أعم (Genus Proximum) وتحدد الخصائص المميزة لها (Differentiae Specificae)، كذلك ينبغى إثبات وجود المفاهيم المُعرَّفة " Defined concepts " .

وتبعا لما سبق حاول إقليدس تنظيم وبناء المعرفة الرياضية فى كتابه "**الأصول**".

يتكون كتاب " **الأصول** " من ١٣ جزءا أو كتاباً. تناول إقليدس فى الكتب الستة الأولى الهندسة المستوية (وهو ما يقدم تقريبا فى الكتب المدرسية عن الهندسة المستوية فى المرحلتين (الاعدادية والثانوية) .

وفى الكتب الثلاثة التالية بنى إقليدس " نظرية الأعداد " أما فى الكتاب العاشر فقد تناول مناقشة الأعداد الصمّاء والنسب غير النسبية . أما الثلاث كتب الأخيرة فقد خصصت لمعالجة الهندسة المجسمة .

وقد كان نظام إقليدس الهندسى يتكون من :

١ - مجموعة من المصطلحات غير المعرفة Undefined terms

٢ - مجموعة من التعاريف والتى تستعمل المصطلحات غير المعرفة ، أو التى عرفت سابقا للوصول الى مفاهيم أخرى .

٣ - مجموعة من المسلمات والمبادئ العامة - وتقبل دون برهان كبديهيات .

٤ - نظام منطقى يستخدم لتحديد صحة أو عدم صحة القضايا الجديدة فى حدود النظام .

٥ - سلسلة من القضايا تسمى نظريات - والتى تستنبط منطقيا من التعاريف والمسلمات - ومن النظريات التى سبق البرهنة عليها .

وسنقتصر فيما يلى على مناقشة الكتاب الأول ، وما يهمنا منه فى قضية الهندسة الاإقليدية .

وفيما يلى بعض التعاريف الذى وضعها إقليدس في بداية كتابه الأول.

التعاريف :

١ - **النقطة** : هى ماليس له أجزاء .

٢ - **الخط** : هو طول بلا عرض .

٣ - **طرفى الخط** : عبارة عن نقط .

٤ - **الخط المستقيم** : هو مايقع تماما (evenly) على نقاطه .

٥ - **السطح** : هو ما له طول وعرض فقط .

٦ - **أطراف السطح** : عبارة عن خطوط .

٧ - **السطح المستوى** : هو سطح يقع تماما على خطوطه المستقيمة .

٨ - **الزاوية المستوية** : هى ميل خطين متقابلين مستويين بالنسبة لبعضهما وبحيث لايقعان معا فى خط مستقيم واحد .

٩ - **الزاوية المستقيمة** : عندما يقع الخطان المكونان للزاوية على نفس الخط المستقيم فإن الزاوية تسمى زاوية مستقيمة الخطين (Rectilineal) .

١٠ - **الزاوية القائمة** : عندما يقام أحد " ضلعى الزاوية " على خط مستقيم مكونا زاويتين متجاورتين متساويتين ، فإن كلاً من الزاويتين المتساويتين تسمى زاوية قائمة . ويسمى المستقيم المقام على الآخر مستقيما عموديا عليه .

١٥ - **الدائرة** : شكل مستو مُحتَوى بخط واحد يسمى المحيط بحيث أن كل الخطوط المستقيمة المرسومة من نقطة معينة داخـــل الشكل إلى المحيط تكون متساوية.

٣٥ - **المستقيمات المتوازية** : هى تلك المستقيمات التى تقع فى نفس المستوى والتى اذا ما مدت من أى من جهتيها فانها لاتلتقى فى أى من الجهتين مهما امتدت .

ويلاحظ فى تعاريف إقليدس الآتى :

أن إقليدس اعتبر النقط والخط والسطح أشياء " ليست مادية " بل مجردة ، فالنقطة ليست بقعة صغيرة والخط ليس خيطا رفيعا والسطح ليس أرضية غير سميكة. . . ، كذلك نرى بعض الغموض فى تعاريفه للمستقيم والسطح . أيضا لم يحدد ضلعا الزاوية بأن يكونا خطين مستقيمين بل عرفهما بأنهما مجرد خطين . كما نلاحظ أن تعريفه للخط المستقيم لم يقصد به أن يكون مستقيما لانهائيا ، حيث تحدث عن " طرفيه " ، ووصفه كما لو أنه " قطعة مستقيمة " بالمعنى الذي نعرفه حاليا . وقد سبق تعريف الدائرة (الخامس عشر) ، تعاريف من (١١ - ١٤) عن الزاوية الحادة والمنفرجة وأعطى تعاريف بعد ذلك من (١٦ -٣٤) لمركز الدائرة والقطر ونصف الدائرة والمضلع ولأنواع من المثلثات والأشكال الرباعية .

المسلمات :

بنى إقليدس " **أصوله** " على خمس مسلمات كالآتى :

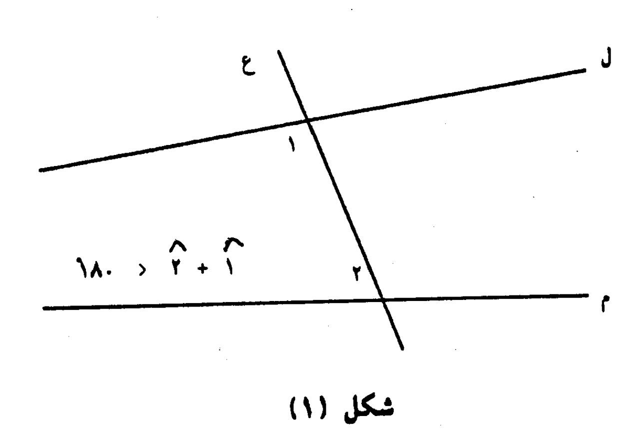
١ - يسلم بالآتى : يمكن رسم خط مستقيم من أى نقطة الى أخرى .

٢ - و : يمكن مد خط مستقيم محدود باستمرار كخط مستقيم .

٣ - و : يمكن رسم دائرة بمعلومية مركز ومسافة معلومة .

٤ - و : الزوايا القائمة متطابقة (متساوية) .

٥ - و : اذا قطع مستقيم مستقيمين بحيث أن مجموع الزاويتين الداخليتين وفى جهة واحدة من القاطع تكون أقل من قائمتين ، فإن هذين المستقيمين يلتقيان اذا مدا على استقامتهما من هذه الجهة التى يكون فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من قائمين .



شكل (١)

ماذا تقول هذه المسلمات ؟

إن المسلمة (١) تعنى ببساطة أنه يمكن توصيل أى نقطتين ببعض بواسطة قطعة مستقيمة واحدة .

والمسلمة (٢) تعنى أنه يمكن مد أى قطعة مستقيمة على استقامتها كما نشاء، وبالتالى يمكن أن تتولد قطعة مستقيمة أطول من الأولى وهكذا يمكن مد هذه القطعة المستقيمة دون نهاية ، وهذا بدوره يعنى أنه توجد مستقيمات لانهائية (أى ممتدة امتداداً لا نهائياً) .

وعلى هذا يمكن تلخيص المسلمة (١) ، المسلمة (٢) معاً فى التسليم بما يأتى:

أى نقطتين يحددان خطاً مستقيماً واحداً ، وأن الخط المستقيم يمتد امتداداً لانهائيا .

المسلمة (٣) تقول بأن الدائرة تتعين بمعلومية مركزها ونصف قطرها .

أى أن المسلمات (١) ، (٢) ، (٣) تنص ضمنا على وجود النقطة والخط المستقيم والقطعة المستقيمة والدائرة أما المسلمتان (٤) ، (٥) تختلفان عن المسلمات الثلاثة السابقة لهما . فالمسلمات (١) ، (٢) ، (٣) هى فى الواقع مسلمات " وجود " أما المسلمة (٤) فهى لاتنص على وجود زوايا قائمة ولكن تقول بأن كل الزوايا القائمة متطابقة . أما المسلمة الخامسة فهى تتطلب أن نقبل أن المستقيمين اللذين يتقابلان تحت شروط معينة (مجموع الزوايا الداخلة أقل من قائمتين) لهما نقطة تقاطع .

الواضح أن المسلمتين (٤) ، (٥) هما مسلمتان خاصتان بالهندسة فقط بينما يمكن النظر الى المسلمات الثلاثة الأولى على أنهما أقرب الى المبادئ العامة .

ومن ثم يمكن تصنيف مسلمات إقليدس الخمسة الى :

(١) مسلمات الوجود (١ ، ٢ ، ٣) وفيها إفترض وجود مبادئ أساسية .

(٢) مسلمات خواص هندسية (٤ ، ٥) وفيها افترض توفر خواص هندسية معينة لبعض الأشكال الهندسية .

المبادئ العامة : Common Notions

تمشيا مع النموذج الذى وضعه أرسطو لبناء نظام رياضى ، وضع إقليدس مجموعة من المبادئ العامة منها :

١ - الأشياء المساوية لنفس الشئ تكون متساوية .

٢ - إذا أضيفت متساويات الى متساويات كانت النتائج متساوية .

٣ - الأشياء المتطابقة مع بعضها تكون متساوية .

٤ - الكل أكبر من الجزء .

النظريات (المبرهنات) :

بعد وضع الأساس قام إقليدس بتكوين البناء الهندسى " **للأصول** " والذي يشتمل على الخواص الهندسية ، التى قام بالبرهنة عليها مراعيا ما يأتى :

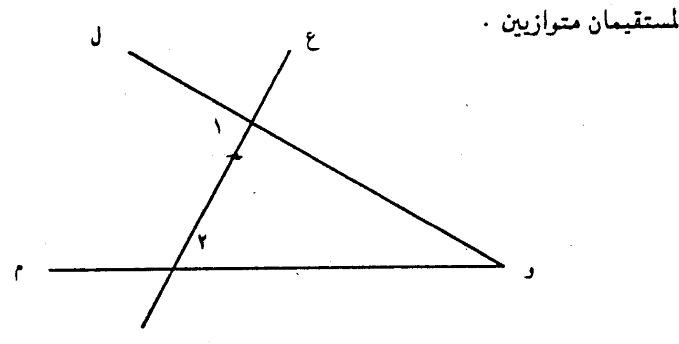
(١) كل عبارة (علاقة هندسية) جديدة لابد من إثبات صحتها بالبرهان .

(٢) كل مصطلح جديد ينبغى تعريفه ، وأكثر من ذلك ينبغى التدليل على وجوده .

تضمن الكتاب الأول (٤٨) نظرية (ومبرهنة) . تناولت هذه النظريات تطابق المثلثات ، المستقيمات المتوازية والمساحات . وإنتهى الكتاب الأول بنظرية فيثاغورس وعكسها .

وقد برهن إقليدس الثمانية والعشرين نظرية الأولى استناداً إلى المسلمات الأربعة الأولى . وقد تضمنت هذه النظريات بعض الانشاءات مثل انشاء مثلث متساوى الأضلاع على قطعة مستقيمة معلومة ، إثبات تطابق المثلثات بالشروط المعروفة ، نظرية المثلث المتساوى الساقين وعكسها ، تنصيف زاوية معلومة ، تنصيف قطعة مستقيمة معلومة ، إسقاط عمود على مستقيم من نقطة خارجة عنه ، استقامة ضلعى زاويتين متجاورتين مجموعها قائمتين ، تساوى الزاويتين المتقابلتين بالرأس ، الزاوية الخارجة للمثلث أكبر من أى زاوية أخرى ماعدا المجاورة لها ، مجموع أى زاويتين فى المثلث أقل من قائمتين ثم نظرية (٢٧) والتى تنص على مايأتى :

إذا قطع مستقيم مستقيمين بحيث كانت الزاويتان المتبادلتان متساويتان كان المستقيمان متوازيين .



شكل (٢)

المعطيات : ع مستقيم يقطع المستقيم ل ، المستقيم م
، $\hat{١} = \hat{٢}$

المطلوب : إثبات أن : المستقيم ل // المستقيم م .

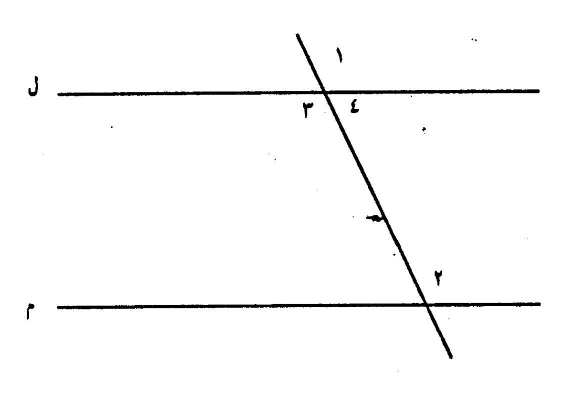
استخدم إقليدس البرهان غير المباشر بفرض أن ل ، م يتقابلان فى النقطة (و) فيحدث تناقض مع نظرية الزاوية الخارجة للمثلث (نظرية ١٦ فى كتابه) .

أما نظرية (٢٨) فكان نصها كالآتى :

إذا قطع مستقيم مستقيمين ، فإن المستقيمين يكونان متوازيين اذا تحقق واحد من الشرطين التاليين :

(أ) تساوت أى زاويتين متناظرتين .

(ب) كان مجموع زاويتين داخلتين فى جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين.



شكل (٣)

(أ) **المعطيات** : $\hat{١} = \hat{٢}$

المطلوب إثبات أن : المستقيم ل // المستقيم م

استخدم إقليدس نظرية (١٥) فى كتابه فيكون $\hat{١} = \hat{٣}$ بالتقابـل بالــرأس ، ومنها ومن المعطيات يكون $\hat{٢} = \hat{٣}$ وحيث أنهما متبادلتـان فبنــاء علــى نظرية (٢٧) ينتج أن المستقيم ل // المستقيم م .

(ب) **المعطيات** : $\hat{٤} + \hat{٢} = ٢$ ق .

المطلوب إثبات أن : المستقيم ل // المستقيم م .

وللوصول الى المطلوب استخدم إقليدس النظرية (١٣) فى كتابه والتى بناء عليها $\hat{٤} + \hat{٣} = ٢$ ق .

ولكن من المعطيات $\hat{٤} + \hat{٢} = ٢$ ق . إذن $\hat{٤} + \hat{٣} = \hat{٤} + \hat{٢}$

فباستخدام المبادئ العامة الخاصة بالتساوى يكون $\hat{٢} = \hat{٣}$ وهما متبادلتان وبناء على نظرية (٢٧) ينتج أن المستقيم ل // المستقيم م .

ثم استخدم إقليدس لأول مرة المسلمة الخامسة فى برهان النظرية (٢٩) .

والتى تنص على مايأتى :

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

أ - الزوايا المتبادلة تكون متساوية .

ب - الزوايا المتناظرة تكون متساوية .

حـ - مجموع الزاويتين الداخلتين وفى جهة واحدة من القاطع تساوى قائمتين .

وهنا ظهرت إشكالية المسلمة الخامسة .

إشكالية المسلمة الخامسة :

إذا نظرنا إلى المسلمة الخامسة وهى الخاصة بالتوازى نجد أنها تنص على الآتى: " إذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع الزاويتين الداخليتين وفى جهة واحدة من القاطع أقل من قائمتين ، فإن هذين المستقيمين يتقاطعان إذا إمتدا فى نفس جهة هاتين الزاويتين " .

والملاحظ أن هذه المسلمة هى معكوس نظرية (٢٨) السابق الاشارة اليها . وهنا تشكك كثير من الرياضيين الذين أتوا بعد إقليدس ، وقالوا لماذا لم يشتق إقليدس هذه المسلمة كنظرية وقام بالبرهنة عليها ! .

وقد حاول كثير من الرياضيين البرهنة على هذه " المسلمة " كمبرهنة مشتقة من المسلمات والنظريات السابقة لاستخدامها . ومن بين من قاموا بهذه المحاولات نذكر الرياضيين التاليين :

(١) بطليموس (Claudius Ptolemy) (حوالى عام ١٥٠ بعد الميلاد) .

(٢) بروكلوس (Proclus) (من ٤١٠ - ٤٨٥ بعد الميلاد) .

(٣) العباس بن سعيد الجوهرى (حوالى ٨٣٠ ميلادياً) .

(٤) الحسن بن الهيثم (من ٩٦٥ - ١٠٤٠ ميلادياً) .

(٥) عمر الخيام (من ١٠٤٨ - ١١٣١ ميلادياً)

(٦) نصير الدين الطوسى (من ١٢٠١ - ١٢٧٢ ميلادياً)

(٧) چون والاس (John Wallis) (من ١٦١٦ - ١٧٠٣ ميلادياً)

(٨) جيرولامو زخارى (Gerolamo Saccheri) (من ١٦٦٧ - ١٧٣٣ ميلادياً)

(٩) لامبرت (J.H. Lambert) (من ١٧٢٨ - ١٧٧٧ ميلادياً)

(١٠) لاجاندر (A.M. Legendre) (من ١٧٥٢ - ١٨٣٣ ميلادياً)

وقد كان بطليموس أول من حاول إثبات هذه المسلمة ، ولكن بروكلوس وجد مغالطة فى برهانه . كما حاول بروكلوس البرهنة عليها ولكن برهانه كان يعتمد على مسلمة أخرى تكافئ مسلمة إقليدس حيث إفترض أن المستقيمات المتوازية يتساوى البعد بينهما . وفى كل محاولات البرهنة حدثت أخطاء منطقية كانت في معظمها الدوران فى حلقة مفرغة بمعنى استخدام المطلوب إثباته فى البرهان ، أو أن البرهان كان يعتمد على مسلمة بديلة افترضها واضعها ولكنها فى حقيقة الأمر تعتبر مكافئة لمسلمة إقليدس . ناهيك عن بعض المحاولات التى تضمنت مغالطات وقع فيها الرياضى نفسه أثناء محاولة البرهان .

وسوف نعرض فيما يلى بعض هذه المحاولات :

محاولة عمر الخيام :

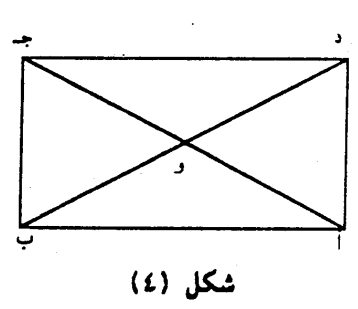
ورد فى مخطوطه مترجمة الى اللغة الانجليزية ذكر مترجمها (أ.ر. أمير عام ١٩٥٩) أنها كتبت بخط عمر الخيام نفسه عن " مناقشة الصعوبات عند إقليدس "

وأنه ترجمها عن كتاب لشخص يدعى مسعود بن محمد بن على مكتوب في الشهر القمرى شعبان من عام ٦١٥ للهجرة ، والذي ذكر بدوره أن الخيام كتبها فى نهاية الشهر القمرى جمادى الأولى من عام ٤٧٠ للهجرة ، ورد قول الخيام بأنه أصبح من الضرورى البحث عن السبب فى أن يهمل إقليدس برهان هذا الأمر وأن يثق فى مبادئ الحكمة ولايستخلصها (بالبرهان) من معنى الخط المستقيم والزاوية بين المستقيمين. وقد حاول الخيام أن يربط بين مسلمة التوازى والمسلمة الرابعة . وفى محاولة لمعالجة مشكلة التوازى استخدم الخيام خمس مبادئ عامة وقبل النظريات الثمان والعشرين الأولى (التى أشرنا اليها سابقا) ثم افترض وبرهن ثمان نظريات اقترحها لكى تحل محل المسلمة ومحل النظرية التاسعة والعشرين التى تعتمد عليها فى البرهان ، ونورد فيما يلى النظريات التى اقترحها الخيام دون ذكر البراهين التى أعطاها ، وهذه مأخوذة عن دراسة أمير التى نشرها فى عام ١٩٦١ فى مجلة أمريكية (Scripta Mathematica) .

نظرية (١) - شكل (٤)

إذا كانت أب قطعة مستقيمة معلومة وأقمنا العمودين أد ، ب جـ على أب بحيث كان أد = ب جـ

فإن : زاوية أ$\hat{د}$ جـ = زاوية ب $\hat{جـ}$ د



شكل (٤)

نظرية (٢) - شكل (٥)

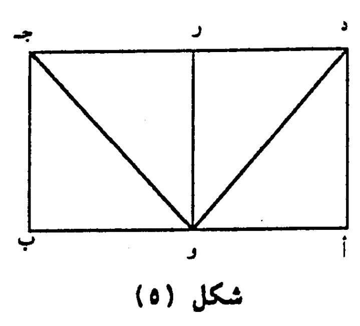
اذا كان أب جـ د كما فى نظرية (١)

وكانت نقطة و منتصف أ ب وكـان

و ر عموديا على أ ب عند و

فإن : و ر يكون عموديا على جـ د

ومنصفا له .



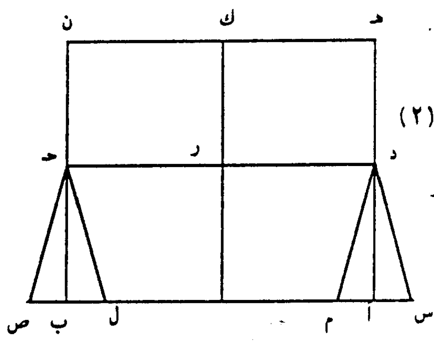
شكل (٥)

نظرية (٣) - شكل (٦)

خذ نفس المعطيات كما فى نظرية (٢)

فإن : زاوية أ د ر = زاوية ب جـ ر

= زاوية قائمة .



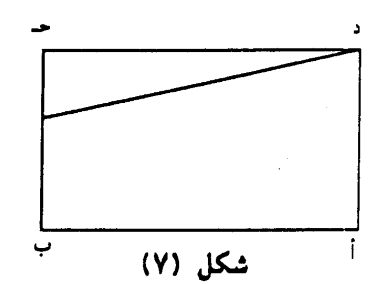
شكل (٦)

نظرية (٤) - شكل (٧)

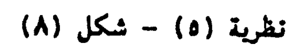
إذا كان الشكل ذو الأربع زوايا

أ ب جـ د زواياه قوائم فإن :

أ ب = جـ د ، أ د = ب جـ .



شكل (٧)



نظرية (٥) - شكل (٨)

اذا كان المستقيمان أ ب ، جـ د

متواجهين (Visa- a - Vis) فإن :

أى مستقيم عمودى على أحدهما يكون عموديا

على الآخر .

شكل (٨)

نظرية (٦) - شكل (٩)

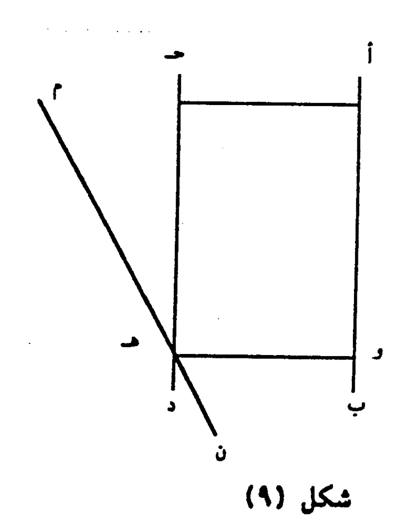
أى مستقيمين متوازيين (وهما اللذان

لايتقاطعان حسب تعريف إقليـــــدس)

متواجهان .

(إذا كان أ ب ، جـ د متوازيان ، إذن

فهما متواجهان)

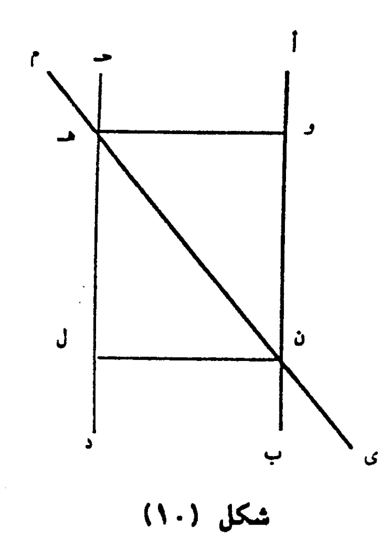


شكل (٩)

نظرية (٧) - شكل (١٠)

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن الزاويتين المتبادلتين تكونان متساويتين ، والزاوية الخارجة تساوى الزاوية الداخلة

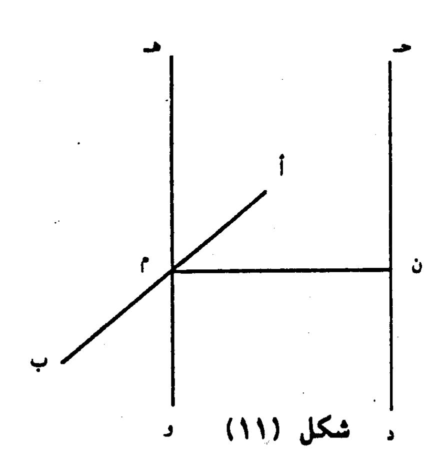
(إذا كان أ ب ، جـ د مستقيمين متوازيين ، وكان المستقيم م هـ ن ى قاطعا لهما فإننا نقول أن الزاويتين ل هـ^ ن ، أ ن^ هـ متبادلتان ومتساويتان ، والزاويتين أ ن^ هـ ، جـ هـ^ ن داخلتان ومجموعهما يساوى قائمتين ، والزاوية الخارجة جـ هـ^ م تساوى الزاوية الداخلة أ ن^ هـ



شكل (١٠)

نظرية (٨) - شكل (١١)

اذا كانت م ن قطعة مستقيمة ، وكان المستقيمان م أ ، ن جـ يمران بالنقطتين م ، ن بحيث يكون مجموع الزاويتين أ م ن ، حـ ن م أقل من قائمتين ، فإن هذين المستقيمين يتقاطعان باتجاه أ



شكل (١١)

وبعد أن " برهن الخيام تلك النظريات الثمانية قال : " هذا هو البرهان الحقيقى لنظرية المتوازيات . فإذا أضفنا هذه النظريات الى كتاب " الأصول " بالترتيب المذكور فإننا نبعد كل مانقص من مبدأ الحكمة " .

وعلى الرغم من أن الخيام أخطأ فى برهانه على النظرية (٣) ، إلا أن المهم فيما قام به فى هذه المحاولة هو أنه اعتبر فى برهانه ثلاث حالات بحسب ما إذا كانت كل من الزاويتين أ د ر ، ب جـ د أقل من قائمة أو أكبر من قائمة أو تساوى قائمة . وبإستخدام " العمل " وتطابق الأشكال الناتجة ، توصل الى تناقضات مع المبادئ التى قبلها ، ثم استبعد حالتى الزوايا الأقل من قائمة والأكبر من قائمة ، وقبل الحالة الثالثة التى تكون فيها كل من الزاويتين أ د ر ، ب جـ د قائمة . والأهمية الأساسية والرئيسية فى معالجة الخيام تكمن فى أنه وضع يديه على الثلاث حالات التى عرفت فيما بعد باسم فرض الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة والزاوية القائمة ، وهى الفروض التى أدت الى ظهور الهندسة اللا إقليدية ، وقد كان هذا الفرض ينسب إلى الرياضى الايطالي جيرولامو زخارى (Saccheri) . ولكنه أصبح معروفا الآن أن الخيام سبقه الى هذا الفرض قبل حوالى ستة قرون ، وان كان لم يتابعه .

مسلمات مكافئة لمسلمة إقليدس :

كثير من المحاولات للبرهنة على مسلمة اقليدس أجريت عن طريق التسليم بسلمات أخرى مكافئة لمسلمة اقليدس · ومن أشهر هذه المسلمات المكافئة :

(١) مسلمة بلايفير (Playfair) (١٧٤٨ - ١٨١٩)

وهذه أشهر مسلمة لبساطتها · وهى وإن نسبت الى بلايفير فان بعض المؤرخين يقولون بأن واضعها فى الحقيقة رياضى آخر يدعى لودلام Ludlam ونص هـذه المسلمة كالآتى :

" لايمكن أن يوازى كل من مستقيمين متقاطعين مستقيما ثالثا "

وهذه تكافئ الصيغة الأكثر شهرة ونصها :

" من نقطة خارج مستقيم معلوم لايمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازى المستقيم المعلوم ·

(٢) مجموع زوايا المثلث قائمتان ·

(٣) أية ثلاثة نقاط إما تكون على استقامة واحدة أو على نفس الدائرة (بولياى) ·

(٤) لايوجد حد أعلى لمساحة المثلث (جاوس) ·

(٥) الأشكال المتشابهة لها وجود ·

(٦) إذا تساوى ضلعان متقابلان فى شكل رباعى ، وكانت الزاويتان المجاورتان لضلع ثالث زاويتين قائمتين ، كانت الزاويتان الباقيتان زاويتين قائمتين أيضا ·

(٧) إذا كان فى الشكل الرباعى ثلاث زوايا قائمة ، فإن الزاوية الرابعة تكون قائمة كذلك .

(٨) من أى نقطة داخل زاوية أقل من ٦٠° يمكن دائما رسم مستقيم يقطع ضلعى الزاوية .

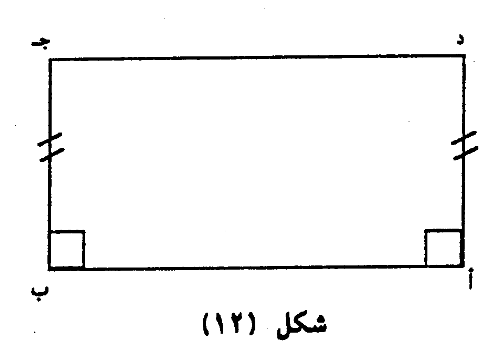
(٩) إذا توازى مستقيمان كانا متماثلين بالنسبة للنقطة المتوسطة لأجزاء القواطع العرضية بينهما .

(١٠) فى المستوى الواحد يوجد زوج من المستقيمات يكون البعد بينهما متساويا دائما .

محاولة جيرولامو زخارى :

كان زخارى رياضيا إيطاليا من علماء الجزويت ، وكان معاصرا وصديقا للرياضى شيڤا (Ceva) . وقد اتخذ طريقا مخالفا لما سبقوه فى محاولة البرهنة فقد بدأ بقطعتين مستقيمتين متساويتين فى الطول ومتعامدتين على مستقيم ثالث .

كما بالشكل حيث أ د = ب جـ ، كل من أ د ، ب جـ ⊥ أ ب .



شكل (١٢)

عند توصيل النقطتين جـ ، د يمكن بسهولة اثبات أن الزاويتين جـ ، د متساويتان. ولكن هل تكونان زاويتين قائمتين ؟ . اعتمد زخارى فى برهانه على مبدأ عدم التعارض ، واستخدم النظريات الثمان والعشرين التى لاتعتمد على مسلمة التوازى ، وتوصل إلى فروض الزاوية القائمة والمنفرجة والحادة :

بالشكل (١٢) المبين أ ب جـ د عبارة عن شكل رباعى فيه أ د = ب جـ ، زاويـة د أ^ ب = زاوية أ ب^ جـ = ق (زاوية قائمة) .

قام زخارى بتوصيل القطرين أ جـ، ب د . وباستخدام نظريات التطابق (وهى ضمن النظريات الثمانية والعشرين الأولى) استطاع زخارى أن يثبت أن الزاوية ب جـ^ د = الزاوية جـ د^ أ . ولكنه لم يستطع استنتاج أى شئ خاص بقيمة هذه الزوايا بدون استعمال مسلمة التوازى . وحينئذ قرر أن هناك ثلاثة إحتمالات لاغير وهى إما أن الزاويتين قائمتان (كما وصل إليها إقليدس باستعمال مسلمة التوازى) أو أنهما منفرجتان أو حادتان وأطلق عليها زخارى الفروض الثلاثة :

(أ) فرض الزاوية القائمة .

(ب) فرض الزاوية المنفرجة .

(جـ) فرض الزاوية الحادة .

وكانت طريقته التى كان يأمل فيها هى أن يتخلص من الاحتمالين الأخيرين باثبات أن هذين الفرضين الأخيرين يقودان الى استحالة وذلك باستعمال طريقة البرهان غير المباشر . وبذلك يتبقى الاحتمال الأول فقط وهو فرض الزاوية القائمة ، وعلى ذلك يكون قد أثبت مسلمة التوازى وينتهى الأمر . ولكنه وجد أن التخلص من فرض

الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة ، أى إثبات استحالتهما لم يصبح أمرا سهلا . وكانت النتيجة تكوين سلسلة من النظريات سنذكر منها خمس نظريات على سبيل المثال :

نظرية (١) :

إذا كان أحد الفروض الثلاثة (السابق ذكرها) صحيحا لأحد الأشكال الرباعية المذكورة (ذات الزاويتين القائمتين وضلعين متقابلين متساويين) يكون هذا الفرض صحيحا لأى شكل رباعى مثل الشكل المذكور .

نظرية (٢) :

مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين أو أكبر من قائمتين أو أقل من قائمتين تبعا لفرض الزاوية القائمة أو الزاوية المنفرجة أو الزاوية الحادة على الترتيب .

نظرية (٣) :

إذا وجد مثلث واحد مجموع زواياه تساوى قائمتين أو أكبر من قائمتين أو أقل من قائمتين ، يتبع ذلك صحة فرض الزاوية القائمة أو الزاوية المنفرجة أو الزاوية الحادة .

نظرية (٤) :

تبعا لفرض الزاوية القائمة ، لايتقاطع المستقيمان إلا فى حالة واحدة ، إذا قطعهما قاطع وكانت الزاويتان المتناظرتان متساويتين . أما تبعا لفرض الزاوية المنفرجة يتقاطع المستقيمان دائما . وأما تبعاً لفرض الزاوية الحادة فيوجد عدد لانهائى من المستقيمات التى تمر بنقطة معلومة ولاتقابل المستقيم المعلوم .

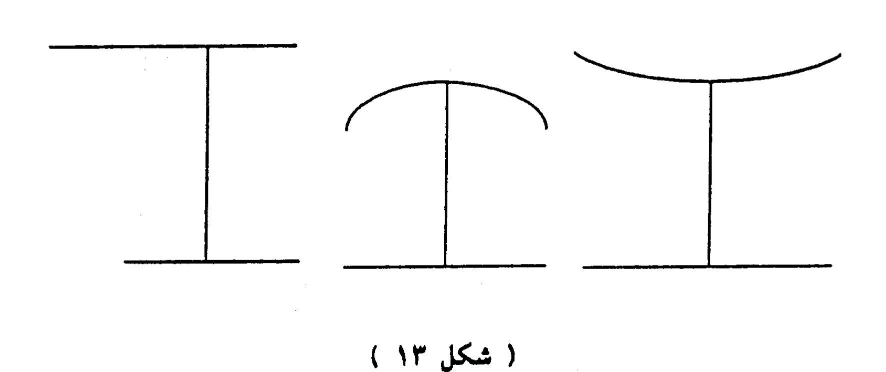
نظرية (٥) :

المحل الهندسى لنهاية عمود طوله ثابت يتحرك بحيث تكون نهايته الأخرى على مستقيم ثابت يكون :

(أ) خط مستقيم نتيجة لفرض الزاوية القائمة .

(ب) منحنى محدب بالنسبة للمستقيم الثابت نتيجة لفرض الزاوية المنفرجة .

(حـ) منحنى مقعر بالنسبة للمستقيم الثابت نتيجة لفرض الزاوية الحادة .



(شكل ١٣)

وبعد أن كون زخارى سلسلة من ثلاث عشرة نظرية استطاع أن يستبعد فرض الزاوية المنفرجة . ولكن بهذا العمل يكون زخارى قد سلم بدون برهان وأخذ بإفتراض إقليدس بأن المستقيم يمكن مده الى مالا نهاية من أى من جهتيه .

وبهذا الفرض وباستعمال نظرية (١٨)* من الكتاب الأول " للأصول " والتى تعتمد على نظرية (١٦) ** من نفس الكتاب ، استطاع زخارى أن يثبت أن فرض الزاوية المنفرجة يؤدى إلى مسلمة التوازى · وهذه بدورها تؤدى إلى أن مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين وهذه النظرية الأخيرة بدورها تتعارض مع النظرية التى تنص على أن :

" تبعا لفرض الزاوية المنفرجة فإن مجموع زوايا المثلث أكبر من زاويتين قائمتين" · وتمشيا مع مبدأ عدم التعارض تخلص من فرض الزاوية المنفرجة ، بعد ذلك عالج زخارى فرض الزاوية الحادة ، حيث وضع مايقرب من عشرين نظرية · أصبحت فيما بعد نظريات كلاسيكية فى الهندسة اللا إقليدية · ولكنه بعد أن بنى هذه النظريات أرغم نفسه على الوصول الى تعارض حتى يستطيع رفض فرض الزاوية الحادة · غير أن هذا التعارض لم يكن مقنعا منطقيا واحتوى علي مفاهيم مبهمة (غير واضحة) عن أشياء أو عناصر في اللانهاية ، والتعارض الذى وصل إليه زخارى هو أنه يوجد خطان مستقيمان بحيث إذا مدا على استقامتيهما إلى مالانهاية فانهما يمتزجان مع بعضهما ، ويكون لهما هناك عمود مشترك · ولم تكن هذه النتيجة التى وصل اليها زخارى بالقوة التى كان يعمل بها قبل أن يصل الى هذه النقطة ، حتى أنه كان من العسير على الكثيرين أن يصدقوا أن عالما له دقة وعمق تفكير زخارى يستطيع أن يقنع نفسه بهذه النتيجة العرجاء التى وصل اليها · وربما كان مـــــــن

---

* إذا مد أحد أضلاع المثلث على استقامته كانت الزاوية الخارجة أكبر من أى زاوية داخلة في المثلث ماعدا الزاوية المجاورة لها ·

** الضلع الأكبر فى المثلث تقابله الزاوية الكبرى ·

الممكن اعتبار زخارى المكتشف الأول للهندسة اللاإقليدية لو أنه كان قد اعترف بشجاعة بفرض الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة ، ولو أنه لم يتقيد بالاعتقاد الذى كان سائدا بأن مسلمة إقليدس (المتفقة مع فرض الزاوية القائمة) هو الافتراض الصحيح الوحيد ٠

محاولة لامبرت :

بعد حوالى خمسين عاما من نشر أبحاث زخارى ، كانت محاولة لامبرت الذى فشل أيضا فى الوصول الى اكتشاف الهندسة اللا إقليدية ٠ وكانت نقطة البداية عنده كبيرة الشبه بما قام به زخارى ، واستطاع أن يصل الى الثلاثة فروض (القائمة والمنفرجة والحادة) ٠ ولكنه سار شوطا أبعد مما ساره زخارى ٠ فقد بين أن فرض الزاوية المنفرجة يؤدى الى أن مساحة المثلث تتناسب مع زيادة مجموع زواياه عن قائمتين ، كما هو الحال فى الهندسة الكرية ٠ وخلص الى أن فرض الزاوية الحادة يمكن أن يتحقق على كرة ذات نصف قطر تخيلى ٠ ووضع ملاحظة هامة تفيد أن الفرض الثالث يؤدى إلى وجود وحدة مطلقة للطول ٠ وقد رفض فرض الزاوية المنفرجة من حيث أن هذا الفرض يتطلب أن خطين مستقيمين ينبغى أن يكونان " فضاء " كما أن معالجته ضد قبول فرض الزاوية الحادة تضمنت أشياء غير مقنعة مثل ضرورة القبول بعدم وجود أشكال متشابهة ٠

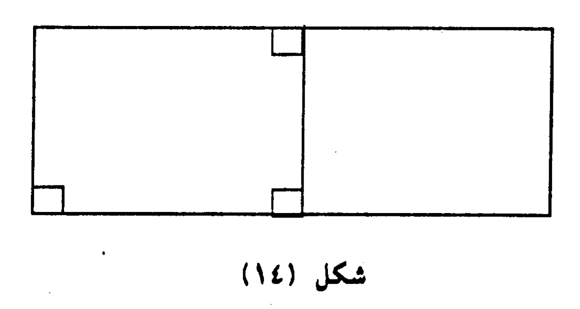
وقد تضمنت أبحاثه فى هذا المجال ثلاثة أجزاء :

١ - الجزء الأول يبحث في امكانية برهنة مسلمة التوازى باستخدام مسلمات إقليدس الأخرى ، أو امكانية برهانها بوضع مسلمات أخرى زيادة على هذه المسلمات .

٢ - الجزء الثانى وكان يهتم بتحويل مسلمة التوازى الى نظريات مختلفة مكافئة لها .

٣ - الجزء الثالث والأخير وكان يضم أبحاثا متشابهة لأعمال زخارى .

وفيما يلى سنخلص أبحاث لامبرت فى الجزء الثالث ، اختـار لامبرت شكـلا (شكل ١٤) أسماه ذا الثلاث قوائم Trirectangle وهو عبارة عن شكل رباعى فيه ثلاث زوايا قائمة . ويمكن اعتباره نصف شكل زخارى . ويتكون هذا الشكل من التوصيل بين منتصفى الضلعين الآخرين فى شكل زخارى .



شكل (١٤)

وكما فى أبحاث زخارى ظهرت ثلاثة فروض تبعا لثلاثة احتمالات خاصة بالزاوية الرابعة : وهى فرض الزاوية القائمة ، فرض الزاوية المنفرجة وفرض الزاوية الحادة .

ولقد ذهب لامبرت فى أبحاثه أبعد من زخارى فقد استنتج نظريات كثيرة تبعا لفرض الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة . ولم تقتصر نتائجه على ايجاد قيمة مجموع زوايا المثلث نتيجة للفروض الثلاثة (تساوى قائمتين ، أكبر من قائمتين أو أقل من قائمتين) . ولكنه بالاضافة الى ذلك أثبت أن الزيادة عن قائمتين فى فرض الزاوية المنفرجة أو النقص عن قائمتين نتيجة لفرض الزاوية الحادة تتناسب مع مساحة المثلث ، أى أن هناك علاقة بين الزيادة أو النقصان عن القائمتين ومساحة المثلث . هذه النتيجة قادته الى ملاحظة أن الهندسة التى نتجت عن فرض الزاوية المنفرجة تشبه الهندسة الكرية (ففى الهندسة الكّرية مساحة المثلث تتناسب مع زيادة حجم الكرة) . ونتيجة لذلك قاده تفكيره الى أنه ربما أن الهندسة الناتجة عن فرض الزاوية الحادة يمكن تحقيقها على كرة نصف قطرها تخيلى . كما توصل لامبرت الى اكتشاف هام آخر يتعلق بقياس الأطوال فى الهندستين الناتجتين من فرض الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة : ففى الهندسة الإقليدية توجد الأشكال المتشابهة ولذلك تقاس الأطوال بدلالة وحدة اختيارية لا علاقة لها من الناحية التركيبية بالهندسة الإقليدية نفسها . وعلى ذلك فالوحدات الطولية فى الهندسة الإقليدية نسبية ولكن الزوايا لها وحدة قياس طبيعية مثل الزاوية القائمة أو الزاوية القطرية والتى يمكن تعريفها هندسيا .

ولذلك فالأطوال فى هندسة إقليدس نسبية بينما الزوايا مطلقة ، ولقد اكتشف لامبرت أنه نتيجة لفرض الزاوية المنفرجة وفرض الزاوية الحادة تكون الزوايا وكذلك الأطوال مطلقة . ذلك لأن كل زاوية فى هاتين الهندستين الجديدتين يناظرها جزء من خط مستقيم بحيث أن كل وحدة طبيعية لقياس الزوايا يناظرها وحدة طبيعية لقياس الأطوال .

ولكن مع هذا كله رجع لامبرت واستبعد فرض الزاوية المنفرجة كما فعل زخارى ولنفس السبب . أما نتائجه بالنسبة لفرض الزاوية الحادة فقد كانت ، كما أشرنا سابقا ، غير محددة وغير مقنعة ، ومن ثم فأنه لم يصل الى نتائج محددة . وربما كان هذا السبب الذى منعه من نشر أبحاثه . وقد نشرت بعد وفاته ببضع سنوات .

محاولة لاجندر :

فى الوقت الذى كان فيه بعض الرياضيين الألمان مثل جاوس (Gauss) على عتبة الوصول الى الهندسة الا إقليدية ، كان الرياضيون فى فرنسا وانجلترا مازالوا يبحثون فى برهان مسلمة أقليدس بنفس الأسلوب التقليدى . وقد كان لاجندر من بين الذين قاموا بمحاولات كبيرة فى معالجة هذه القضية . ونشر أبحاثه فى الفترة من ١٧٩٤ - ١٨٢٣ . وتم تجميعها فى مقال شامل فى مذكرات أكاديمية باريس عام ١٨٣٣ .

وفى محاولته للبرهنة على مسلمة إقليدس للتوازى ، استخدم البرهان غير المباشر دون الرجوع الى الأبحاث السابقة . فوضع ثلاثة فروض خاصة بمجموع زوايا المثلث . وهى أن مجموع زوايا المثلث :

(أ) تساوى قائمتين .

(ب) أكبر من قائمتين .

(جـ) أقل من قائمتين .

ولكنه استطاع أن يحذف الفرض الثانى كما فعل الذين سبقوه وذلك بافتراضه أيضا لانهائية الخط المستقيم . وبالرغم من محاولاته الكثيرة لم يستطع التخلص من الفرض الثالث . وقد بدأ محاولاته الأولى بافتراضه أن اختيار أى وحدة طولية لايؤثر على صحة النظريات وهذا الافتراض يكافئ افتراض وجود الأشكال المتشابهة . أما المحاولة التى تلتها فقد فرض وجود دائرة تمر بأى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة . وأخيرا لاحظ لاجندر (مستقلا عن الذين قبله) الحقيقة التى اكتشفها لامبرت وهى : نتيجة للفرض الثالث يكون نقص مجموع زوايا المثلث عن قائمتين يتناسب مع مساحة المثلث . ولذلك فكر لاجندر فى أنه اذا ابتدأ بمثلث ما استطاع الحصول على مثلث آخر مساحته على الأقل ضعف مساحة المثلث الأول فيكون نقص مجموع زوايا هذا المثلث عن قائمتين على الأقل ضعف النقص فى مجموع زوايا المثلث المعلوم . وبتكرار هذه العملية مرات كافية ينتهى الأمر فى النهاية الى مثلث مجموع زواياه تكون سالبة أى الى حالة غير مقبولة . ولكى يحل مشكلة الحصول على مثلث يحتوى على مثلث مساحته ضعف مساحة مثلث معلوم مرتين على الأقل ، وجد لاجندر أنه يجب أن يفترض الفرض الآتى : من أى نقطة داخل زاوية معلومة أقل من ٦٠ درجة يمكن دائما رسم مستقيم يقطع ضلعى الزاوية . وهذا الفرض يكافئ فى الواقع مسلمة أقليدس للتوازى .

ومن بين النظريات التى أثبتها لاجندر النظريتان التاليتان اللتان تعرفان بأسمه وهما :

(١) " مجموع زوايا المثلث لايمكن أن تكون أكبر من قائمتين " .

(٢) " اذا وجد مثلث واحد مجموع زواياه يساوى قائمتين فان مجموع زوايا كـــل المثلثات الأخرى تساوى قائمتين " – والحقيقة أن هذه النظرية كانت ضمن نتائج زخارى رغم تسميتها باسم لاجندر .

وقد اعتمد لاجندر فى برهانه على النظريتين (١) ، (٢) على مسلمة أرشميدس والتى تنص على انه " اذا وجدت قطعتان مستقيمتان غير متساويتين ، فانه يوجد دائما عدد (محدود) بحيث اذا ضرب فى طول القطعة الصغرى يكون الناتج أطول من القطعة الأخرى " . كذلك استخدم لاجندر فكرة المساحات اللانهائية. كما حاول اثبات البديهية التى سميت ببديهية بلايفير فيما بعد كالآتى :

اذا لم تكن هذه البديهية صحيحة فانه يوجد خط مستقيم يمكن أن يحتوى بكامله داخل زاوية ، ولكن هذا مستحيل لأن المساحة التى تحتويها الزاوية أقل من نصف مساحة المستوى بكامله .

وقد دفعت أبحاث لاجندر رياضيين بريطانيين مثل بلايفير وليزلى اللذين كانا أستاذين بجامعة أدنبره فى ذلك الوقت وآخرين إلى مواصلة البحث . وكان مايكـل (Meikle) أحد الذين تابعوا أعمال لاجندر وساروا شوطا أبعد منه .

الفصل الثانى
اكتشاف الهندسة اللاإقليدية

فى الوقت الذى كانت لاتزال تجرى المحاولات للبرهنة على مسلمة إقليدس للتوازى والتمسك بالاعتقاد بأن هندسة اقليدس كانت مثالا للحقيقة اللزومية (على حد تعبير كانت (Kant) ، كانت هناك أعمال تاريخية تتميز بالشجاعة يقوم بها رياضيون وبشكل مستقل عن بعضهم البعض : فى المانيا على يدى كارل جاوس ، وفى روسيا على يدى لوباتشفسكى (Lobachevsky) . وفى المجر على يدى بولياى (Bolyai) . لقد كان قبول مسلمة أخرى تناقض مسلمة أقليدس شيئا ليس بالأمر اليسير ، اذ كان من يتعرض الى مثل ذلك معرضا لضجة من حكمَاء ذلك الزمان ، بل كان مرفوضا ومعتبرا متهورا أو غير مأمون الجانب ، وكان هذا نوع من الارهاب الفكرى جعل عالما مثل جاوس يحجم عن نشر أبحاثه التى توصل فيها الى فكرة استقلالية مسلمة أقليدس والى امكانية وجود هندسة أخرى تضم مسلمة تخالف مسلمة اقليدس . وبسبب هذا الاحجام عن النشر من جاوس لم ترى الهندسة اللاإقليدية النور فى ألمانيا ، بل ظهرت - وفى نفس الوقت - بعيدا فى روسيا والمجر .

عالج كل من جاوس ولوباتشفسكى وبولياى قضية التوازى من خلال مسلمة بلايفير (المكافئة لمسلمة اقليدس) ، وذلك باعتبار ثلاث امكانات وهى :

من نقطة معلومة خارج مستقيم معلوم :

(أ) يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازى المستقيم المعلوم .

(ب) لايمكن رسم أى مستقيم يوازى المستقيم المعلوم .

(جـ) يمكن رسم أكثر من مستقيم يوازى المستقيم المعلوم .

وهذه الامكانات تناظر على الترتيب : فرض الزاوية القائمة ، فرض الزاوية المنفرجة ، وفرض الزاوية الحادة ، وقد فكر هؤلاء الرياضيون فى حذف الامكانية الثانية (ب) ، حيث انهم افترضوا (كسابقيهم) بأن المستقيم لانهائى ثم حاولوا ايجاد تعارض ينشأ فى حالة الفرض الثالث (جـ) . ولكنهم لم يجدوا تعارضا ناتجا عن هذا الفرض . الأمر الذي جعل ثلاثتهم (كل مستقلا عن الآخرين) يشكون ويفكرون بامكانية وجود نظام هندسى آخر - الى جانب النظام الاقليدى - يكون متآلفا (Consistent) ومتضمنا الافتراض الثالث . وقد حاول كل منهم خلق مجموعة من نظريات هذه الهندسة الجديدة ، مندفعا بميله الطبيعى للبحث وحب الاستطلاع .

ويرجع المؤرخون الفضل لجاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) فى اطلاق مصطلح "الهندسة اللااقليدية " على الهندسة الجديدة . ومع أن جاوس شغل تفكيره بمسلمة التوازى منذ شبابه ، الا أنه لم يبتدئ بالشك فى امكانية استقلال هذه المسلمة عن باقى مسلمات اقليدس الأربعة السابقة لها الا فى أواخر العشرينات من عمره . بل أنه فى حوالى عام ١٨٢٠ كان قد توصل الى العديد من نظريات هندسية لا اقليدية. وقد كان جاوس يشجع اصدقاءه على الاستمرار فى بحث قضية التوازى ، مثل تلميذه شيفكارت (Schweikart) أستاذ القانون فى جامعة ماربورج (Marburg) الذى أرسل لجاوس فى عام ١٨١٨ رسالة تشرح نظاما هندسيا أطلق عليه " هندسة النجوم الحائرة " (Astral Geometry) والتى فيها مجموع زوايا المثلث تكون دوما أقل من قائمتين ، كما تتضمن وجود وحدة مطلقة للطول . وما أن بدأ جاوس فى التفكير فى نشر ابحاثه بعد أن وجد الوقت الكافى لشرحها بتفصيل يتفق مع كياسته التى كان يتميز بها ، حتى وجد أن هناك من سبقه فى نشر هذا الكشف العظيم حين تسلم من

صديقه ولفجانج بولياى فى عام ١٨٣٢ نسخة مما كتبه ابنه يوحنا بولياى والذى ذيل به ولفجانج كتابه ، والذى كان متضمنا الهندسة الاقليدية الجديدة .

ويعتبر يوحنا بولياى (Johan Bolyai) الرياضى المجرى (١٨٠٢ - ١٨٦٠) ثانى شخص بعد جاوس يفكر فى وجود هندسة غير اقليدية . وقد كان بولياى ضابطا مجريا فى الجيش النمساوى . وكان أبوه ولفجانج بولياى صديقا لجاوس . وربما تأثر بولياى الابن بدراسات أبيه العالم الرياضى الذى كان فى شبابه ميالا لدراسة مشكلة التوازى ، والذى ناقش - فى أغلب الظن - الموضوع مع جاوس عندما كانا فى جامعة جوتنجن (Gottingen) فى عام ١٨٠٤ عندما عين بولياى الأب أستاذا للرياضيات بجامعة ماروس - ڤاسارهلى (Maros-Vasrhely) ، ارسل الى جاوس دراساته عن " نظرية فى المتوازيات " حاول فيها برهانا شبيها لما قام به مايكل وغيره والتى حاول فيه اثبات أن متسلسلة من القطع المتساوية المرسومة نهاية بنهاية مكونة زوايا متساوية ، كما هو الحال فى المضلع المنتظم يجب أن تكون شبكة دائرية كاملة ، وعلى الرغم من أن جاوس اكتشف وجود مغالطة الا أن بولياى صمد وأرسل الى جاوس فى عام ١٨٠٨ تعديلا لبرهانه . ولما لم يجبه جاوس هجر بولياى الأب محاولة حل لغز المستقيمات المتوازية ولجأ الى كتابة الشعر وتأليف الدراما وخلال العشرين عاما التالية ، قام بتجميع أعماله الرياضية ونشر فى عام ١٨٢٢ / ١٨٢٣ مجلدين عن نظام رياضى تضمن كل افكاره فيما يتعلق بالمبادئ الأولى للهندسة .

وفى نفس الوقت كان يوحنا بولياى (الابن) الطالب بالكلية الملكية للمهندسين فى ڤيينا بالنمسا يضع اهتماما كبيرا لنظرية المتوازيات بالرغم من مناشدة أبيه له بأن يدع ذلك الموضوع المنفر جانبا ، فى أول الأمر حاول يوحنا شأنه فى ذلك شأن من سبقوه ، أن يجد برهانا لمسلمة اقليدس . ولكنه بالتدريج وعندما ركز

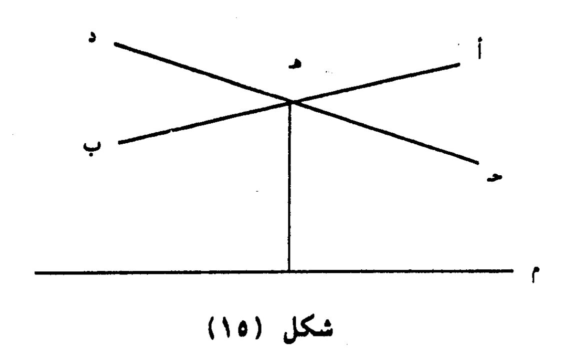
انتباهه شيئا فشيئا على النتائج التى قد تأتى نتيجة رفض المسلمة وجد أنه ينشئ فى ذهنه فكرة عن " هندسة مطلقة " عامة تتضمن الهندسة الاقليدية كحالة خاصة . فى عام ١٨٢٣ كان قد كون الأفكار الرئيسية لهندسة لا إقليدية . وفى الثالث من شهر نوفمبر من ذلك العام أرسل خطابا الى أبيه يخبره بأنه ينوى أن ينشر دراسة له عن نظرية المتوازيات لأنه كما قال " توصلت الى اكتشافات عظيمة مدهشة ، وسوف يكون خطأ لايمكن اصلاحه اذا ما ظل هذا الكشف مجهولا " واستطرد يوحنا قائلا : "وعندما تقرأ هذا الكشف ياوالدى العزيز سوف تعترف به أيضا ، لا أستطيع أن أقول أكثر من ذلك سوى اننى من لاشئ استطعت أن أخلق عالما جديدا مختلفا ، كل ما أرسله لك مرفقا مع هذه الرسالة أن هو الا منزل كارتونى مقارنا ببرج " وقد نصح بولياى الأب ابنه بنشر دراساته بأسرع مايمكن طالما أنها وصلت الى الهدف المرغوب . ولأنه كثيرا ماتكون الأفكار الجديدة عرضة للتسرب . بل غالبا ماتتضح الاكتشافات الجديدة تلقائيا فى عدة أماكن فى نفس الوقت " كما تتفتح أزهار البنفسج فى فصل الربيع " وقد كانت توقعات بولياى أصدق مما كان يتوقع . ففى نفس الوقت ، كان لوباتشفسكى فى جامعة كازان ، وجاوس فى جامعة جوتينجن ، وتاورينوس فى كولونيا على شفا هذا الكشف العظيم . ومع ذلك ظل كشف يوحنا بولياى الى عام ١٨٣٢ حين تم نشره ، حيث ظهر فى المجلد الأول من كتاب والده تحت عنوان " الملحق " (Appedix, Scientiam absolute Veram exhibens) وعلى الرغم من أن يوحنا بولياى خلف كما هائلا من أبحاثه الا أنه لم ينشر شيئا منها خلاف ماذيل به والده كتابه الأول . ولكن والده نشر كتابا آخر بالألمانية أشار فيه الى الموضوع . وعندما وصل الى يوحنا بولياى كتاب الرياضى الروسى لوباتشفسكى فى عام ١٨٤٨، كان ذلك دافعا له لأن يستكمل عمله العظيم الذى خطط له عندما نشر

"الملحق" ولكنه ترك ذلك متناثرا وغير متكامل ، ولم يحقق لنفسه أمله الكبير فى النصر على منافسه الروسى .

وقد كان نيكولاى ايڤانوفيتش لوباتشفسكى (١٧٩٣ - ١٨٥٦) استاذا للرياضيات بجامعة كازان الروسية وكان مهتما بنظرية المتوازيات . وفى محاضراته فى الفترة ١٨١٥ - ١٨١٧ حاول لوباتشفسكى بطرق مختلفة - أن يبنى النظرية الاقليدية فى الهندسة . وفى عام ١٨٢٣ أعد دراسة عن الهندسة لاستخدامها فى الجامعة ولكنها لم تلق قبولا حسنا وبالتالى لم تطبع . وظلت حبيسة أضابير الجامعة حتى تم اكتشافها وطباعتها عام ١٩٠٩ . وفى هذه الوثيقة ذكر أنه لم يقدم اكتشافا لبرهان قوى لمسلمة اقليدس ولكن ما تتضمنه الوثيقة يمكن أن يكون مجرد شرح لايستحق اعتباره براهنا رياضيا بالمعنى الدقيق . وبعد ثلاث سنوات من اعداده للوثيقة قدم بحثا أمام قسم الرياضيات والفيزياء بالجامعة شرح فيه مبادئ ما أسماه بالهندسة التخيلية التى هى أعم من الهندسة الاقليدية ، والتى تتضمن أنه يمكن رسم مستقيمين يمران بنقطة معلومة وكل منها يوازي مستقيما معلوما . كما تتضمن نظرية تقول بأن مجموع زوايا المثلث تكون دائما أقل من قائمتين فى هذه الهندسة وقد كتب لوباتشفسكى مجموعة مرتبة ترتيبا منطقيا لنظريات الهندسة الجديدة . كما نشر دراسة باللغة الفرنسية بعنوان " كل الهندسة " (Pan Geometry) وقدم فيها ملخصا لابحاثه مساهما فى المجلد الذى نشرته جامعة كازان بيوبيلها الذهبى .

واعترافا بفضل لوباتشفسكى اطلق الرياضيون على الهندسة التى ابتكرها هو وبولياى بالهندسة اللوباتشفسكية وهى التى يطلق عليها حاليا الهندسة الزائدية (Hyperbolic) وكما أشرنا سابقا فان المسلمة التي تميز هذه الهندسة والتى تحل محل مسلمة اقليدس الخامسة (بصيغة بلايفير) هى :

من نقطة معلومة (مثل هـ) خارج مستقيم معلوم مثل (م) يمكن رسم أكثر من مستقيم يوازى المستقيم المعلوم (فى نفس مستوى هـ ، م) .



شكل (١٥)

وبهذه المسلمة والمسلمات الأربعة السابقة كون لوباتشفسكى هندسة متآلفة وهى الهندسة الزائدية المرتبطة بفرض الزاوية الحادة (الذى سبق رفضه) والمرتبطة بكون مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين .

وقد مر عدد من السنوات بعد ظهور تلك الهندسة ، منذ أن بدأها بولياى ولوباتشفسكى ، دون أن تلقي اعترافا واسعا فى الأوساط الرياضية . وظل الأمر كذلك حتى عام ١٨٦٧ حين وجه الرياضى بالتزر (Baltzer) الانتباه لهذه الهندسة الجديدة وبناء على طلبه نشر هويل (Hoüel) ترجمات فرنسية لهذا العمل التاريخى. وهنا بدأت دراسة جادة لهذا الموضوع .

مما يلفت النظر أنه بينما زخارى ولامبرت (ومن سبقوهم مثل الخيام) اعتبروا

فرضى الزاوية الحادة والمنفرجة ، فإنه لم يرد لفكر بولياى ولوباتشفسكى (ومن سبقوهم مثل جاوس وشفيكارت) أن يعترفوا بفرض الزاوية المنفرجة أو النص الذى يكافئه وهو : "مجموع زوايا المثلث قد يكون أكبر من قائمتين " . وهذا يتضمن مفهوما للخط المستقيم على أنه غير حدودى (Unbounded) ولكنه محدود الطول ، ويرجع الفضل بالدرجة الأولى فى اكتشاف الهندسة الناقصة المبنية على فرض الزاوية المنفرجة لبرنارد ريمان (Riemann) (١٨٢٦ - ١٨٦٦) فى رسالته للدكتوراه والتى نشرت عام ١٨٦٦ بعد وفاته ، وفى هذه الهندسة الكرية يتقاطع المستقيمان مرتين كما تتقاطع دائرتان عظميتان على سطح الكرة ، ويرجع مفهوم الهندسة التى يكون فيها الخط المستقيم محدود (Finite) ويحدد بنقطتين كمستقيم وحيد يمر بهما الى فيلكس كلاين (Klein) . وقد كان كلاين هو الذى صنف الهندسات الى ثلاثة : زائدية (لوباتشفسكى) ، ناقصية (ريمان) ومكافئة (اقليدس) .

وفى هندسة ريمان لاتوجد مستقيمات متوازية (حيث أن أى مستقيمين يتقاطعان) وقد كان لريمان الفضل فى تعميم مفهوم الفضاء (Space) الذى قاد الى الفراغات المجردة . كما قادت ابحاثه الى استخدام طرق الهندسة التفاضيلة بدلا من الطرق التركيبية المعروفة . كما استخدمت بعض هذه الأبحاث البحتة فى تطبيقات هامة مثل نظرية النسبية .

وقد قسم كلاين تاريخ الهندسة اللااقليدية الى ثلاث فترات :

(١) الفترة الأولى : وتضم جاوس ولوباتشفسكى وبولياى ، وتتميز باستخدام الطريقة التركيبية وتطبق طرق الهندسة الابتدائية المعروفة .

(٢) الفترة الثانية : وهى مرتبطة بالتمثيل الجيوديس (Geodesic) ، وتستخدم طرق الهندسة التفاضلية . وتبدأ برسالة ريمان للدكتوراه ، كما تضم أعمالا لرياضيين مثل هلمولتز (Helmohltz) ولاى (Lie) وبلترامى (Beltrami) .

(٣) الفترة الثالثة : وهى مرتبطة بالتمثيل الاسقاطى ، وتستخدم مبادئ الهندسة الاسقاطية البحتة . وتبدأ هذه الفترة مع كايلاى (Cayley) الذى طورت أفكاره وربطت بالهندسة اللا إقليدية بواسطة كلاين .

وقد أضاف سمرڤيل (Summerville) فى عام ١٩١٤ فترة رابعة غير مرتبطة بأى تمثيل ، ولكنها متصلة بالتأسيس المنطقى على مجموعات من المسلمات وأرجع بدايتها الى باش (Pasch) وربما تعود الى قبل ذلك . وتضم هذه الفترة هيلبرت (Hilbert) وبيانو (Peano) وبيرى (Pieri) . كما يمثلها فى الولايات المتحدة ڤلبن (Veblen) . وقد قادت هذه الفترة الى الفحص المنطقى المتشدد لأصول الرياضيات الممثلة بكتاب برتراند رسل المعنون بمبادئ الرياضيات (Principia Mathematica) .

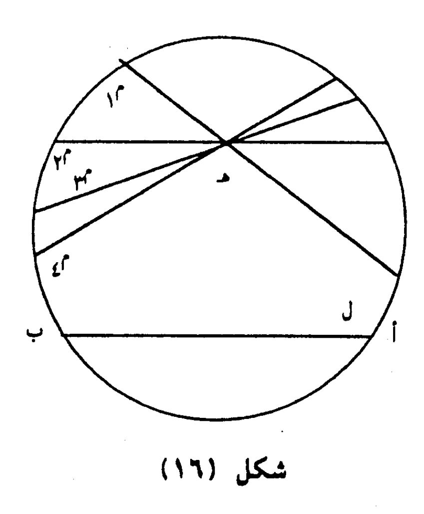
تآلف الهندسة الاإقليدية وأهميتها :

لم يهتم الرياضيون بالهندسة اللااقليدية الا بعد ظهور أعمال لوباتشفسكى وبولياى وريمان بعدة سنوات كما أنهم لم يستسيغوا المضمون الكامل لهذا الكشف الجديد الا بعد مرور عشرات السنين . وقد وجد لوباتشفسكى وبولياى أن الهندسة الجديدة المؤسسة على فرض الزاوية الحادة متآلفة ، أى لم يجدوا أى تعارض (Contradiction) فى أبحاثهما ، أو فى هذا النظام الهندسى الحديث ، كما أنهما شعرا بأنه لن يظهر أى تعارض فيما بعد . ولكن مع ذلك كان هناك دائما احتمال ظهور تعارض أو عدم تآلف اذا ما استمرت الأبحاث الى أبعد من ذلك فليس بكاف

استنباط سلسلة كبيرة من النظريات اللااقليدية كما فعل بولياى ولوباتشفسكى ولكن فكر بعض العلماء فى ابتكار نماذج لهذه الهندسات بحيث أن هذه النماذج تحقق مسلمات اقليدس ماعدا مسلمة التوازى .

نموذج كلاين لهندسة لوباتشفسكى :

يمثل هذا النموذج هندسة لوباتشفسكى بجزء من المستوى الاقليدى يقع داخل دائرة أى يتكون من النقط الداخلية فقط فى الدائرة أما النقط خارج الدائرة فلاينظر اليها (شكل ١٦) .



شكل (١٦)

وتسمى كل نقطة داخل الدائرة نقطة غير اقليدية . كما يسمى كل وتر فى الدائرة خط مستقيم غير اقليدى . أما التوصيل بين نقطتين أو ايجاد نقطة تقاطع خطوط مستقيمة فى هذه الهندسة اللااقليدية ، فهى كما عليه فى الهندسة الاقليدية.

ومن السهل اثبات أن النظام الجديد يحقق كل مسلمات الهندسة الاقليدية ماعدا مسلمة التوازى وعدم تحقيق مسلمة اقليدس للتوازى فى هذا النظام الجديد تتضح من الحقيقة الآتية :

أنه يمكن رسم عدد لانهائى من الخطوط المستقيمة مارة بنقطة ماليست على مستقيم معلوم بحيث لاتوجد نقطة مشتركة بين هذه المستقيمات وبين المستقيم المعلوم. أى أنه أمكن رسم عدد لانهائى من الخطوط المستقيمة من نقطة خارج مستقيم معلوم بحيث تكون هذه المستقيمات موازية لهذا المستقيم المعلوم (النقطة والمستقيم المعلوم فى نفس المستوى) ويكون المستقيم المعلوم وترا إقليديا للدائرة أما المستقيمات الأخرى فتكون أوتارا أخرى تمر بالنقطة المعلومة ولاتقطع المستقيم الأول داخل الدائرة.

وهذا النموذج من تصميم كلاين (١٨٤٩ - ١٩٢٥) ، وهو نموذج بسيط كاف لتوضيح أن مسلمة التوازى لايمكن استنباطها منطقيا من مسلمات اقليدس الأخرى لأنه اذا أمكن استنباطها بهذه الطريقة ، تكون نظرية صحيحة فى هندسة نموذج كلاين، وقد رأينا انها ليست صحيحة فى هذه الهندسة . كما يوضح النموذج مسلمة التوازى الجديدة وهى إمكانية وجود عدد لانهائى من المستقيمات " الموازية " لمستقيم معلوم من نقطة معلومة خارجة عنه فى هذا المستوى الجديد .

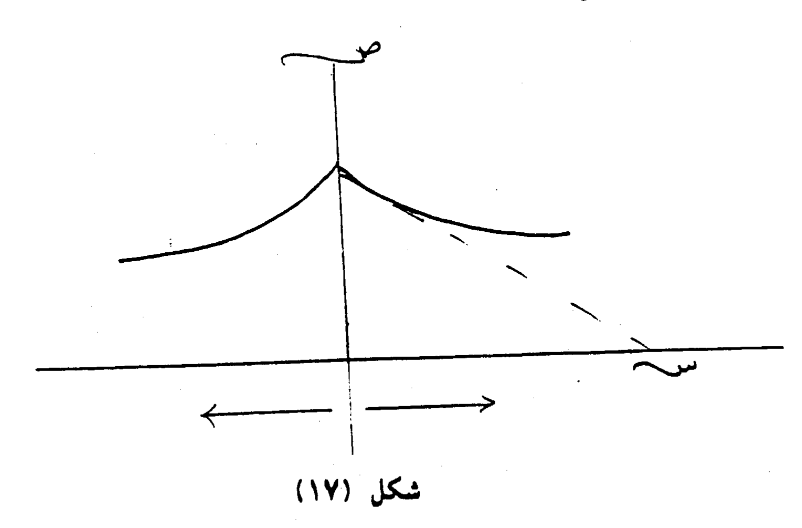
وهناك نماذج أخرى للهندسات اللااقليدية تذكر منها على سبيل المثال نماذج بلترامى (Beltrami) . فقد نشر سنة ١٨٦٨ بحثا أثبت فيه أن هندسة لوباتشفسكى وبولياى يمكن أن تمثل (مع اتخاذ بعض الاحتياطات اللازمة) على سطح مايسمى بالمنحنى ذى الانحناء الثابت السالب (Constant negative curvature) كما أثبت أن

الهندسة اللاإقليدية الثانية التى ترجع لريمان يمكن تمثيلها على سطح آخر ذى اتجاه ثابت موجب . وقد كانت طرق بلترامى تعتمد على الهندسة التفاضيلية .

نموذج بلترامى لهندسة لوباتشفسكى :

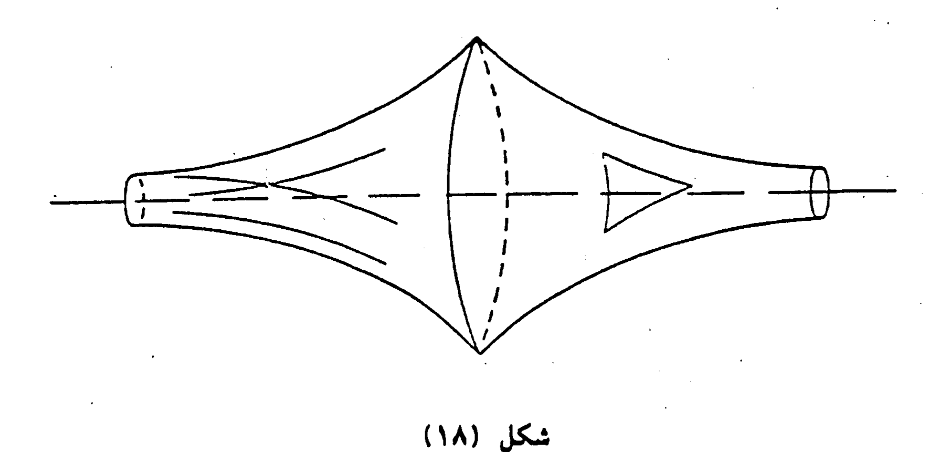
أمكن توضيح مستوى الهندسة اللااقليدية للوباتشفسكى وبولياى على سطح ثابت سالب الانحناء وخاصة على أبسط هذه السطوح وهو السطح المسمى بشبه الكرة (Pseudosphere) أو تراكتويد (Tractoid) . ولتعريف هذا السطح سنعرف أولا منحنى مستويا يعرف باسم تراكتريكس (Tractrix) وهو يتكون كما يأتى :

نتصور قطعة من الحبل غير المطاط على طول المحور الصادى الموجب ، أحد أطراف الحبل يقع على المركز والطرف الآخر متصل به ثقل صغير له وزن كبير بحيث اذا سحب الطرف الواقع عند المركز على طول محور السينات ، رسم الثقل منحنى ، هذا المنحنى هو التراكتريكس (Tractrix) وهو منحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات (أنظر شكل ١٧) .



شكل (١٧)

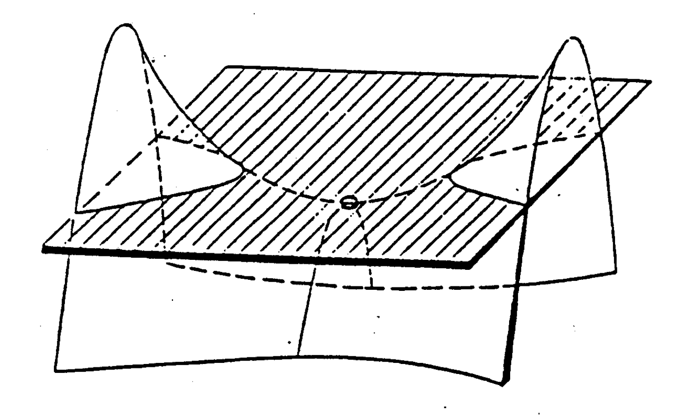
أما الشبه كرة أو (Pseudosphere) فهو سطح الدوران الذى يحصل عليه نتيجة لدوران المنحنى الـ Tractrix حول المحور السينى كمحور للدوران (شكل١٨)٠



شكل (١٨)

وقد أثبت بلترامى أن هندسة المنحنيات (والجيوديس) على هذا السطح تحقق مسلمات هندسة لوباتشفسكى وبولياى اللااقليدية مع مراعاة المصطلحات المناسبة الخاصة ٠ ولكننا لن نتعرض لهذا البرهان هنا فهو يتضمن استعمال الهندسة التفاضلية٠

وقد أطلق على هذه الهندسة بالهندسة الزائدية (Hyperbolic) ذلك لأن نقط هذا السطح (الذى يشبه سرج الحصان) تقع على جانبى المستوى المماس لنقطة على السطح ، واذا حرك مستوى المماس قليلا موازيا لنفسه فانه يقطع سطح المنحنى وينتج منحنى قطع زائد (شكل ١٩) ٠

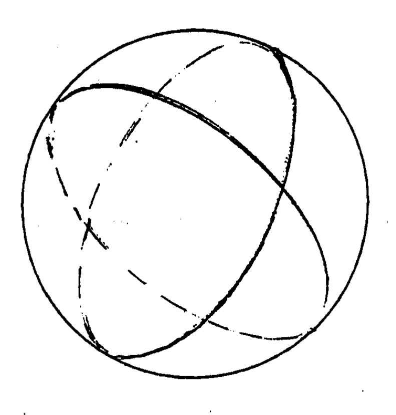


شكل (١٩)

وهذا النموذج الذى يمثل جزءا من مستوى الهندسة اللااقليدية الزائدية فى فراغ اقليدى ، يوضح أن هذه الهندسة (المستوية) متآلفة طالما كانت الهندسة الاقليدية متآلفة .

نموذج بلترامى لهندسة ريمان:

مثل بلترامى مستوى الهندسة الريمانية بسطح كرة (شكل ٢٠) . وقد اتخذ بلترامى سطح الكرة لأنه مثال لأبسط أسطح المنحنيات ذات الانحناء الثابت الموجب ومثل الخطوط المستقيمة فى هذه الهندسة بالدوائر العظمى للكرة التى عرفها بأنها الجيوديسى أى هى المنحنيات ذات الطول الأقصر وتصل بين أزواج النقط على الكرة. ثم أثبت أن مسلمات هذه الهندسة اللااقليدية الريمانية تتحقق على هذا النموذج ، فمثلا :



(شكل ٢٠)

مسلمة ١ : أى نقطتين مختلفتين على الكرة تحدد على الأقل دائرة عظمى واحدة .

(فى الحقيقة تكون الدائرة العظمى واحدة فقط Unique الا اذا كانت النقطتان على الكرة متقابلتين على نفس القطر فى هذه الحالة تحدد هاتان النقطتان عددا لانهائيا من الدوائر العظمى) .

مسلمة ٢ : أى دائرة عظمى على الكرة تكون غير حدودية (Unbounded)

(الدائرة العظمى لاتكون لانهائية فى الطول Infinite ، ولكن كل دائرة عظمى على الكرة تكون لها نفس الطول المحدود Finite) .

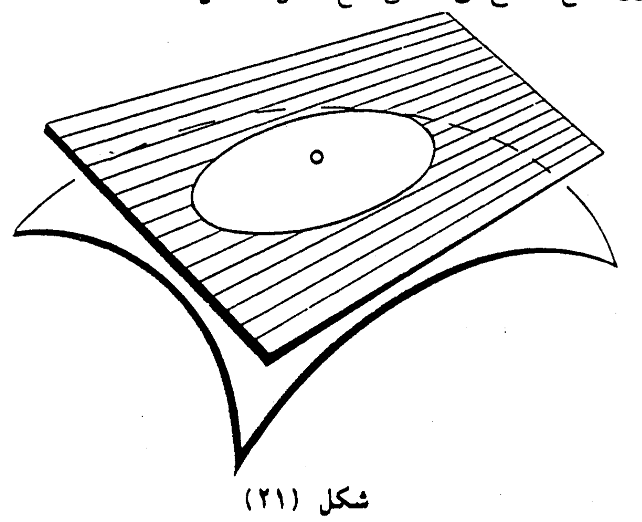
مسلمة ٣ : يمكن رسم دائرة على الكرة بأخذ أى نقطة على الكرة كمركز للدائرة وأخذ أى قوس دائرة عظمى كمسافة قطبية .

مسلمة ٤ : جميع الزوايا القائمة المرسومة على الكرة متساوية .

مسلمة ٥ : أى دائرتين عظمتين على الكرة تتقاطعان .

ثم أثبت بلترامى أن مستوى الهندسة اللااقليدية الريمانية متآلف اذا كانت هندسة اقليدس متآلفة ، حيث انه أمكن تمثيل الهندسة الريمانية بسطح كرة . لأنه اذا وجد عدم تآلف منطقى فى الهندسة اللااقليدية المستوية فسيناظرها عدم تآلف منطقى فى الهندسة الاقليدية الخاصة بالدوائر العظمى على الكرة (وهذه الهندسة الأخيرة جزء من الهندسة الاقليدية للفراغ (الهندسة الفراغية الاقليدية)* وقد أمكن اثبات تآلف الهندسة المتكونة من الجيوديس على أى أسطح ثابت موجب الانحناء وذلك باستعمال الهندسة التفاضلية .

وقد أطلق على الهندسة الريمانية " الهندسة الناقصة " (Elliptic) . ذلك لأن نقط السطح الذى يشبه الكرة تقع جميعها فى جهة واحدة من مستوى المماس عند أى نقطة على السطح واذا حرك المستوى المماس لهذا السطح قليلا موزايا لنفسه ، فان هذا المستوى يقطع السطح فى منحنى قطع ناقص (شكل ٢١) .



شكل (٢١)

---

* استخدمنا كلمتى الفراغ والفضاء بمعنى (Space) .

وبصفة عامة فان تمثيل الهندسة الاقليدية بهذه النماذج وطريقة البرهنة على تآلف هذه الهندسات تبين أن هذا التآلف نسبي فقط وليس مطلقا . لأنه يتوقف على تآلف الهندسة الاقليدية المعروفة . أى أن هذه النماذج توضح أن هاتين الهندستين اللاإقليديتين تكونا متآلفتين لو أن الهندسة الإقليدية متآلفة وقد نتج عن إثبات تآلف الهندسات اللااقليدية أن عرف الجواب على المشكلة القديمة الخاصة بمسلمة التوازى ، وهو أن مسلمة التوازى مسلمة مستقلة عن المسلمات الأخرى لاقليدس. وأنه لايمكن استنباطها من المسلمات الأخرى كنظرية ، كذلك نتج عن اثبات تآلف الهندسات اللااقليدية أن تحررت الهندسة من قالبها التقليدى فأصبحت مسلمات الهندسة بالنسبة للرياضي مجرد افتراضات والرياضى لايعنيه ولايهمه أن يثبت تحقق أو عدم تحقق هذه المسلمات بالنسبة للعالم الطبيعى فهو يختار مسلماته أو فروضه كما يحلو له ولكن بشرط أن تكون متآلفة مع بعضها . وهو لايهمه الصدق الفيزيائى للمسلمة أو حقيقتها طالما أنه ينتج عن مجموعة مسلماته بناء رياضيا متماسكا من ناحية المنطق ثابتا من ناحية التآلف . ونتيجة لإمكانية ابتكار مثل هذه الهندسات "الصناعية" المجردة أصبح من الواضح أن الفراغ (أو الفضاء) الطبيعى يجب أن ينظر إليه كمفهوم عملى مأخوذ من خبراتنا الخارجية وأن تصميم مسلمات الهندسة لوصف الفراغ الطبيعى ما هو الا تعبيرات بسيطة لهذه الخبرة مثلها مثل قوانين العلوم الطبيعية . واثبات تآلف الهندسات الاقليدية لم يحرر علم الهندسة فقط . ولكنه كذلك حرر الرياضيات ككل فقد أصبحت الرياضيات تعتبر ابتكارا أو خلقا اختياريا يقوم به العقل البشرى وليس كشئ أملته علينا الحاجة بواسطة العالم الذي نعيش فيه. وابتكار الهندسات اللااقليدية بواسطة اختراق اعتقاد تقليدى وعادة فى التفكير استمرت قرونا طويلة ، قد ألغت الاعتقاد بأن حقائق الرياضيات مطلقة . وينسب لجورج كانتور قوله بأن " جوهر الرياضيات يكمن فى حريتها " .

وسنعرض فى الأجزاء التالية أمثلة لنظريات الهندستين الزائدية (لوباتشفسكى) والناقصية (ريمان) بشئ من التبسيط والايجاز .

الفصل الثالث
بعض النظريات فى الهندسات اللاإقليدية

بعض خواص الهندسة الزائدية

سوف نبدأ بمجموعة من المسلمات . وقد صنف هيلبرت (Hilbert) مسلمات الهندسة الى خمس مجموعات :

(١) مسلمات الربط (Connections) أو التصنيف : وهى التى تربط بين النقطة والمستقيم والمستوى .

(٢) مسلمات الترتيب (Order) ،وهى التى تشرح فكرة البينية .

(٣) مسلمات التطابق (Congruence) .

(٤) مسلمات المتوازيات (Parallels) .

(٥) مسلمات الاتصال أو الاستمرارية (Continuity) .

ومن هذه المسلمات يمكن اشتقاق علاقات وخواص تتعلق بالقطع المستقيمة والزوايا . وجدير بالملاحظة هنا أن الأشكال الهندسية ليست أشياء مادية بل مفاهيم مجردة لاتتحرك ولاترسم ولاتنشأ . ولكن الأمر يكمن فى التصور الذهنى البحت للأشكال من حيث التصور العقلى لها وكأنها صور على لوحات فوتوغرافية ، وعندما يذكر فى كتاب هندسة تطبيق شكل فوق الآخر ، فالمعنى لايزيد عن عمل مقارنة بين الشكلين واستخلاص بعض النتائج مشتقة من مسلمات التطابق . وعندما يتحدث عن تحرك نقطة أو خط مستقيم أو أى شكل هندسى ، فإن الأمر يعنى مجرد تحويل انتباه القارئ لتعاقب هذه الأشكال فى مواقع مختلفة .

إن قياس الزوايا مستقل عن نظرية التوازى ، فبغض النظر عن المسلمة التى

يتبناها النظام الهندسى فى التوازى ، فإن : الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متساوية، مجموع الأربع زوايا الناشئة من تقاطع مستقيمين يساوى ثابت مطلق وربع هذا الثابت يسمى زاوية قائمة . لذلك فإنه توجد وحدة مطلقة للزوايا ، والزاوية المنبسطة (المستقيمة) تساوى قائمتين يرمز لها عادة بالرمز π (ط) ، من نقطة معلومة يمكن رسم عمود واحد على مستقيم معلوم . ويجدر بالملاحظة هنا أن القيمة العددية للثابت (ط) لايهمنا الا عند معالجة القوانين المثلثية (وكذلك الحال بالنسبة للقيمة العددية لوحدة الزوايا) . ولكن اذا عالجنا ط كعدد فاننا نعين لها العدد التقريبى المعروف ١٤ر٣ أو $\frac{٢٢}{٧}$ أو بالدقة فأن ط = ٤ أمثال مجموع المتسلسلة اللانهائية ١ - $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٥}$ - $\frac{١}{٧}$ + $\frac{١}{٩}$ .....

ومن المناسب الاشارة الى أن ط هنا لا شأن لها بالنسبة بين محيط الدائرة وقطرها، اذ أنه فى الهندسة اللااقليدية هذه النسبة ليست ثابتة . كذلك فأن الراديان (الزاوية النصف قطرية) كوحدة زوايا والتى بدلالتها تمثل الزاوية المستقيمة بالعدد ط ، ليست مرتبطة بانشاء الدائرة .

مسلمات التطابق تقود الى نظريات تطابق المثلثات المعروفة وإلى تساوى زاويتى قاعدة المثلث المتساوى الساقين والتى تعنى ضمنيا تماثل المستوى . نظريات التباين فى أضلاع وزوايا المثلث صحيحة فى اطار منطقة مقيدة . نظرية الزاوية الخارجة (التى تبنى عليها نظريات التباين) صحيحة على الاطلاق فى الهندسة الزائدية .

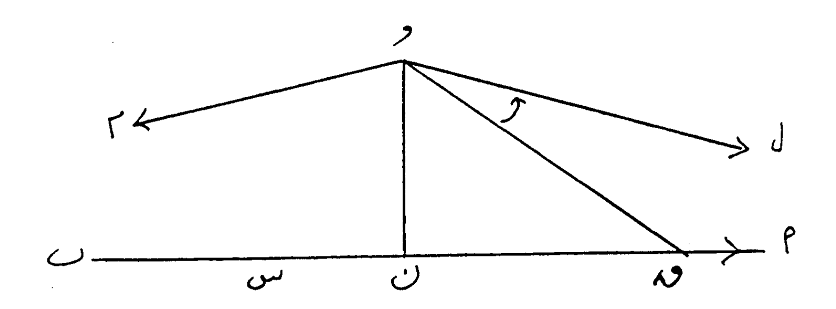
إحدى مسلمات الترتيب الهامة هى مسلمة باش Pasch ونصها :

" اذا قطع خط مستقيم أحد أضلاع مثلث ولم يمر بأحد رؤوس المثلث فإنه يقطع أحد الضلعين الآخرين " .

جزء كبير من الهندسة يمكن أن يبنى دون الاعتماد على مسلمات الاتصال .
ولكننا سنفترض فيما سيعرض هنا وجود الاتصال .
أن الخط الفاصل بين الهندسة الاقليدية والهندسة الزائدية (اللااقليدية) هى مسلمة التوازى .

المستقيمات المتوزاية :

اعتبر الشكل (٢٢) الآتى :



(شكل ٢٢)

ليكن س خطا مستقيما ، (و) نقطة خارجة عنه . وليكن و ن ⊥ س .
نأخذ النقطة ق على المستقيم س . المستقيم و ق يقطع س فى نقطة ق .
عندما تتحرك ق بعيدا عن ن ، ينتج امكانيتان :

(١) قد تعود نقطة ق الى نقطة بدايتها بعد أن تقطع مسافة معينة محدودة .

وهذا هو الفرض الذي تأخذ به الهندسة الناقصية (الريمانية) .

(٢) قد تستمر النقطة ق فى التحرك وتؤول المسافة ن ق الى اللانهاية .

هذا فرض تأخذ به الهندسة الإقليدية العادية . و ق يسعى الى موقع نهائى معين نهايته و ل . وهنا يقال أن و ل يوازى ن أ .

واذا تحركت النقطة ق على المستقيم س فى الاتجاه المعاكس ، فان و ق سوف تسعى الى موقع آخر نهايته و م ، وسوف يكون و م يوازى ن ب .

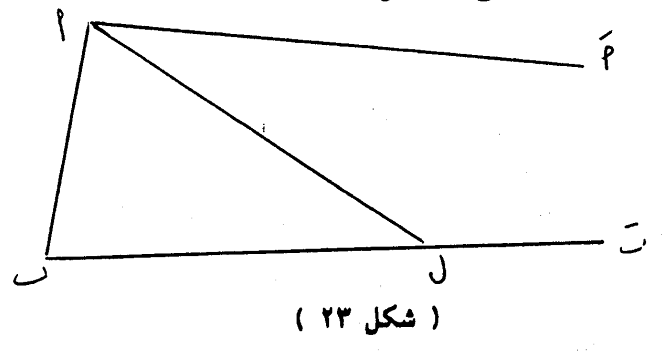
- فى الهندسة الاقليدية ، يكون و ل ، و م مستقيما واحدا ، وتكون الزاويتان ن و^ ل ، ن و^ م قائمتين .

- أما فى الهندسة الزائدية فأن و ل ، و م مختلفان وهو مايتناقض مع بديهية بلايفير (المكافئة للمسلمة الخامسة لاقليدس والخاصة بالتوازى) .

وفيما يلى سنعرف التوازى ثم نعرض بعض نظريات الهندسة الزائدية فى المستوى .

تعريف التوازى :

أولا : يقال أن المستقيمين أ أَ // ب بَ متوازيان فى اتجاه (السمت) المبين بالشكل اذا توفر الآتى : (شكل ٢٣)



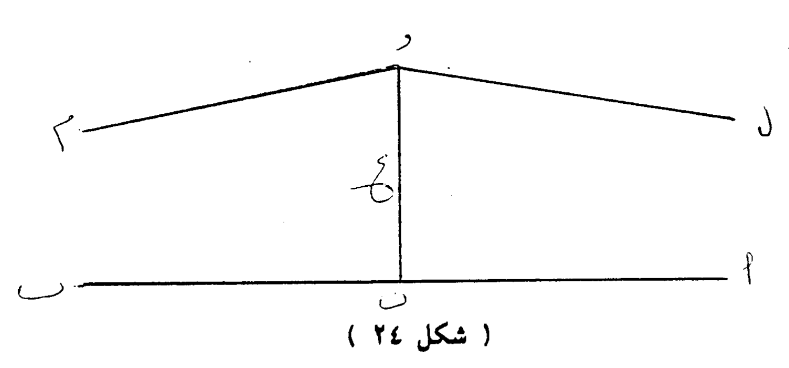
(شكل ٢٣)

(١) يقع المستقيمان أ أ ، ب ب فى نفس المستوى .

(٢) أ أ ، ب ب لايلتقيان مهما أمتدا الى مالانهاية .

(٣) كل شعاع يمر بنقطة أ داخل الزاوية ب أ أ يلاقى المستقيم ب ب .

ثانيا : من أى نقطة (و) لاتقع على مستقيم معلوم أ ب يمكن رسم مستقيمين ول، و م كل منهما يوازى المستقيم أ ب . (شكل ٢٤) .



(شكل ٢٤)

يلاحظ أن :

(١) و ل // ن أ ، و م // ن ب .

(٢) الزاوية ن و ل = الزاوية ن و م من تماثل الشكل .

(٣) تتوقف قيمة هذه الزاوية (ن و ل = ن و م) على طول العمود و ن . وليكن ع ، وتسمى هذه الزاوية زاوية التوازى (Parallel-angle) ويرمز لهذه الزاوية بالرمز // (ع) .

(٤) يوجد اتجاهان (سمتان) للتوازى .

(٥) يفصل المستقيمان و ل ، و م (الموازيان للمستقيم أ ب) مجموعة

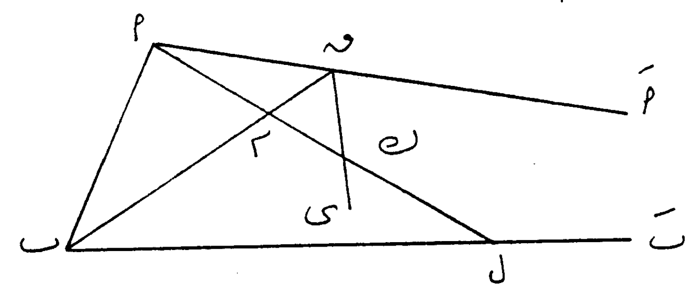
المستقيمات المارة بالنقطة و الي صنفين : المستقيمات التى تقطع أ ب ، المستقيمات التى لاتقطع أ ب .

بعض النظريات الهندسية :

أولا : خواص للتوازى مشتركة بين الهندستين الاقليدية والزائدية :

(١) قابلية الانتقال

خاصية التوازى تظل كما هى فى نفس الاتجاه (السمت) عبر الطول الكلى للخط المستقيم .



(شكل ٢٥)

المعطيات : ليكن أ أَ // ب بَ ، لتكن ق أى نقطة تقع على أ أَ .

المطلوب : اثبات أن كل شعاع يمر بالنقطة ق داخل الزاوية ب قَ أَ يقطع المستقيم ب بَ ، وأن أى شعاع آخر يمر بالنقطة ق يقطع ب بَ.

البرهان : توجد حالتان : اذا كانت ق علي جانب نقطة أ فى جهة التوازى (١)

أو اذا كانت ق ليست فى جهة التوازى (٢)

فى الحالة (١) نرسم أى مستقيم ق ي يمر بالنقطة ق بحيث يقع داخل الزاوية ب ق̂ أَ .

نأخذ نقطة ك علي ق ى

أ ك لابد وأن يقطع ب بَ فى نقطة ولتكن ل ، يقطع ب ق فى م.

∴ ق ى الذى لايمكن أن يقطع م ل أو ب م مرة أخرى لابد وأن يقطع الضلع الثالث ب ل فى المثلث ب م ل (يحسب مسلمة باش) ولكن ق أَ لايقطع ب بَ .

∴ ق أَ // ب بَ

فى الحالة (٢) يكون أخذ " ك " بالضرورة على ى ق عندما يمتد بالاتجاه المعاكس .

(٢) **التوازى خاصية تبادلية**

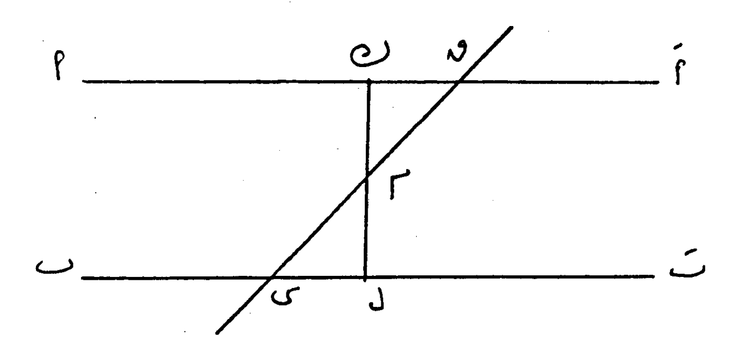
بمعنى أنه اذا كان أ أَ // ب بَ فإن ب بَ // أ أَ

(٣) **التوازى خاصية متعدية (انتقالية)**

بمعنى أنه اذا كان أ أَ // ب بَ ، ب بَ // حـ حـَ فإن أ أَ // حـ حـَ

ثانيا : خواص للتوازى تختلف فيها الهندسة الزائدية عن الهندسة الاقليدية :

(١) اذا قطع مستقيم مستقيمين بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين وفى جهة واحدة من القاطع مساويا لقائمتين ، فإن المستقيمين لايتلاقيا ولايكونان متوازيين .



(شكل ٢٦)

المعطيات : ليكن ق ى قاطعا للمستقيمين أ أَ ، ب بَ فى نقطتى ق ، ى بحيث أن : أ قَ^ى + ق ى^ ب = قائمتين (شكل ٢٦)

المطلوب : اثبات أن أ أَ ، ب بَ لايتلاقيا ولايتوازيا .

البرهـان : ∵ ق ى^ ب + بَ ى^ ق = ط

∴ الزاويتان المتبادلتان أ ق^ ى ، بَ ى^ ق متساويتان

اذا نصفنا ق ى عند نقطة م ورسمنا م ك ⊥ أ أَ ، م ل ⊥ ب بَ

فإن المثلثين م ك ق ، م ل ى يتطابقان .

∴ ك م^ ق = ل م^ ى (من التطابق) .

∴ ك م ل خط مستقيم عمودى على كل من أ أَ ، ب بَ .

ومن التماثل :

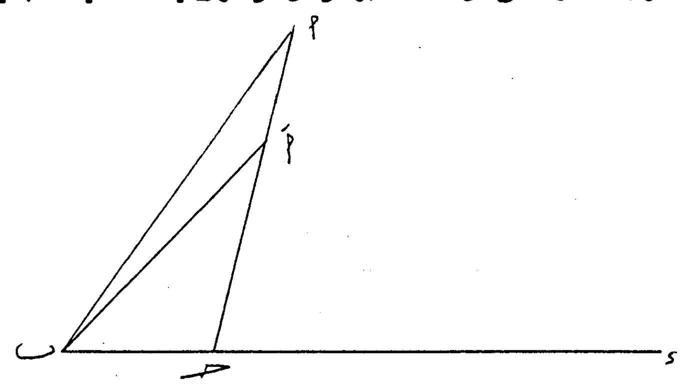
إذا تقابل المستقيمان أ أَ ، ب بَ فى احدى الجهتين ، فانهما سوف يتقابلان أيضا فى الجهة الأخرى . ويحدث هذا فقط فى حالة الهندسة الريمانية . كذلك اذا توازى أ أَ ، ب بَ فى جهة

(سمت) واحدة فانهما سيتوازيان أيضا فى الجهة المعاكسة .
وهذا صحيح فى الهندسة الاقليدية .
ومن ثم : فانهما فى الهندسة الزائدية لايتقابلا ولايتوازيا .

نتيجة :

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فان مجموع الزاويتين الداخلتين وفى جهة التوازى يكون أقل من قائمتين .

(٢) الزاوية الخارجة فى أى مثلث أكبر من أى من الزاويتين الداخلتين المقابلتين



(شكل ٢٧)

ليكن أ ب جـ مثلثا ، نمد ب جـ على استقامته الى د (شكل٢٧)
الزاوية الخارجة أ جـ د : إما أ جـ د > أ ب جـ فيثبت المطلوب
وإما أ جـ د = أ ب جـ
وإما أ جـ د < أ ب جـ
اذا كانت أ جـ د = أ ب جـ
∴ أ جـ ب + أ ب جـ = ط (لأن أ جـ ب + أ جـ د = ط)

ولكن ب أ ، جـ أ هنا يتقابلان ، وهذا يحدث فقط فى الهندسة الريمانية .

∴ أ جـ^ د ≠ أ ب^ جـ

اذا كانت أ جـ^ د < أ ب^ جـ

نرسم ب أَ بحيث أَ ب^ جـ = أ جـ^ د

وحيث أن ب أَ يقع داخل الزاوية أ ب^ جـ فانه لابد وأن يقطع أ جـ

وينتج أن :

أَ ب^ جـ + أَ جـ^ ب = ط

وهذا أيضا مستحيل (الا فى الهندسة الريمانية)

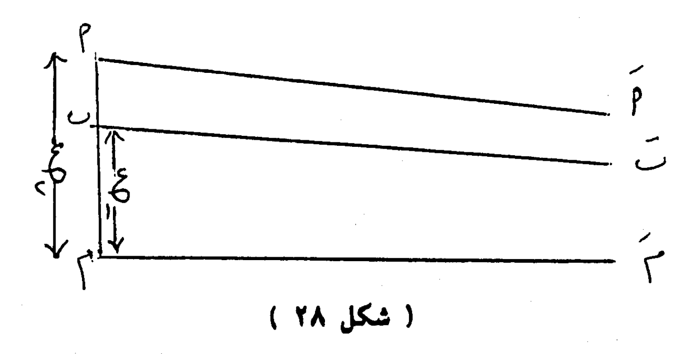
∴ أ جـ^ د ≮ أ ب^ جـ

وإذن الزاوية الخارجة أ جـ^ د > الزاوية الداخلة أ ب^ جـ

وبالمثل تكون أكبر من جـ أ^ د .

ويعنى ذلك أن نظرية الزاوية الخارجة صحيحة فى الهندستين الاقليدية والزائدية وليست صحيحة فى الهندسة الريمانية .

(٣) تتناقص زاوية التوازى // (ع) كلما ازداد طول العمود ع ، (شكل ٢٨)



(شكل ٢٨)

ليكن أ أَ // م مَ ، ب بَ // م مَ ، أ ب م ⊥ م مَ ، أم > ب م أى

ع٢ > ع١ .

∴ م أ̂ أَ + أ ب̂ بَ < ط (نتيجة ١)

ولكن م ب̂ بَ + أ ب̂ بَ = ط

∴ م أ̂ أَ < م ب̂ بَ

أى أن // (ع٢) < // (ع١) حيث ع٢ > ع١

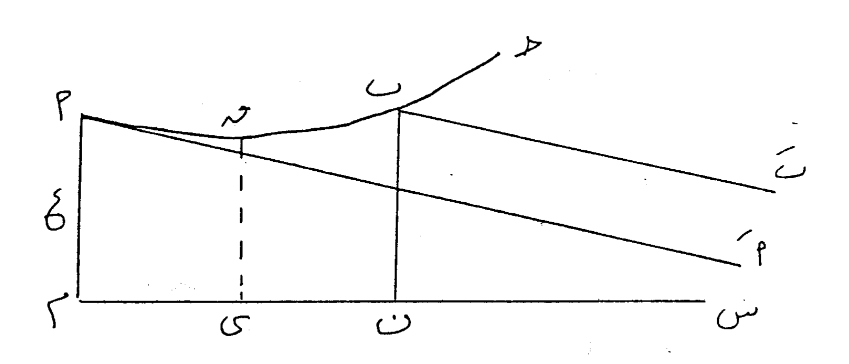
ملاحظة :

- زاوية التوازى//(ع) لها قيمة وحيدة لكل قيمة لطول العمود ع .
- توجد قيمة وحيدة للعمود ع تناظر أى زاوية توازى حادة .
- // (ع) دالة متصلة للمتغير ع .
- كلما زادت ع (ع ← ∞) فان // (ع) تتناقص (//ع ← صفر)
  كلما اقتربت ع من الصفر (ع ← صفر) فان // (ع) تقترب من ط/٢ (// (ع) ← ط/٢)
- مدى المتغير ع يمكن أن يمتد الى القيمة السالبة .

فاذا فرضنا أن نقطة أ تتحرك فى الاتجاه المعاكس للمستقيم م مَ فان الزاوية م أ̂ أَ سوف تصبح منفرجة . وسيكون لدينا :

// (– ع) + // (ع) = ط

(٤) اذا احتوي شكل رباعى على ثلاث زوايا قائمة كانت الزاوية الرابعة حادة



(شكل ٢٩)

ليكن أ ب ن م شكلا رباعيا زاويتاه عند الرأسين المتجاورين م ، ن قوائم وليكن م أ = ن ب (شكل ٢٩)

نرسم ق ى عمودا على م ن ينصفه فى ى

من التماثل نرى أن م أ̂ ب = ن ب̂ أ

نرسم أ أَ // م ن ، ب بَ // م ن .

∵ م أ = ن ب ∴ م أ̂ أَ = ن ب̂ بَ (= // (ع))

وحيث أن أَ أ̂ ب + بَ ب̂ أ < ط (زاويتان داخلتان)

∴ بَ ب̂ جـ > أَ أ̂ ب

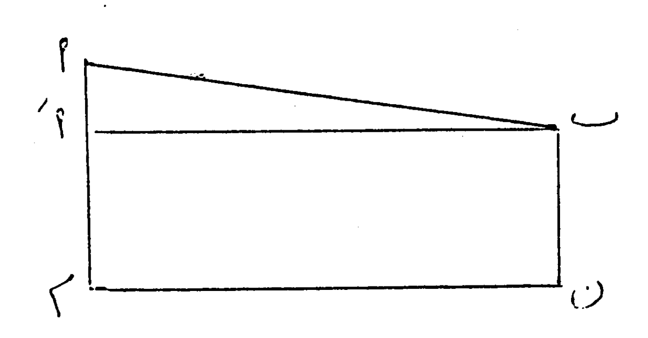
∴ م أ̂ ب < ن ب̂ جـ

∴ كل من الزاويتين م أ̂ ب ، ن ب̂ أ حادة

(ومن ثم فإن الهندسة الزائدية تتضمن فرض زخارى الخاص بالزاوية

الحادة) ومن ذلك ، وبالنظر الى الشكل الرباعى أ م ى ق نجد أن زاويته م أ̂ ق حادة ·

(٥) اذا كان أ م ن ب شكلا رباعيا بحيث كان أ م ، ب ن عمودين على م ن ، وكان أ م > ب ن فان م أ̂ ب < ن ب̂ أ (شكل ٣٠)



(شكل ٣٠)

نأخذ نقطة أَ على م أ بحيث م أَ = ن ب

∵ ن ب̂ أ > ن ب̂ أَ

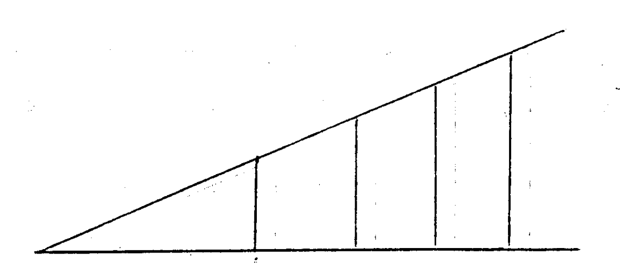
، م أَ̂ ب > م أ̂ ب (الزاوية الخارجة عن المثلث)

ولكن ن ب̂ أَ = م أَ̂ ب

∴ ن ب̂ أ > م أ̂ ب

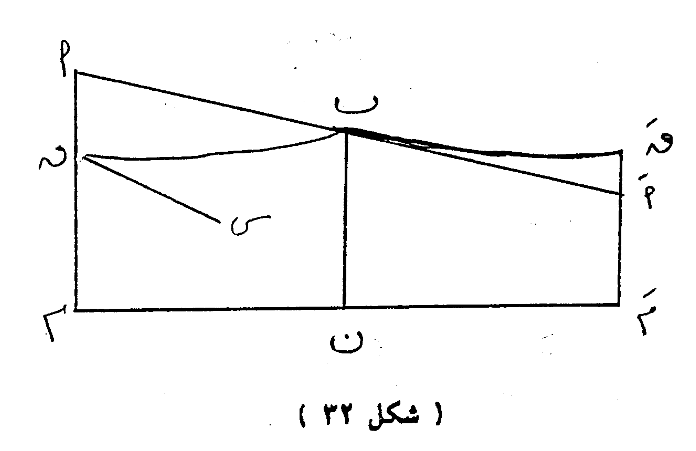
وبالعكس : اذا كانت م أ̂ ب < ن ب̂ أ فان م أ > ن ب

(٦) المسافة بين مستقيمين متقاطعين تزداد بدون حدود . (شكل ٣١)



(شكل ٣٢)

(٧) المسافة بين مستقيمين متوازيين تتناقص فى اتجاه التوازى وتسعى نحو الصفر .



(شكل ٣٢)

ليكن أ أَ // م مَ ، أ م ⊥ م مَ ، ب ن ⊥ م مَ حيث أ ، ب تقعان على أ أَ بحيث أن ب تقع فى جهة التوازى بالنسبة للنقطة أ

(شكل ٣٢)

الزاويتان م أ̂ أَ ، ن ب̂ أَ حادتان

لذلك فان م أ̂ ب < ن ب̂ أ ∴ ن ب < م أ

فاذا اخترنا طولا وليكن هـ مهما كان صغيرا واخترنا ق بحيث م ق < هـ ، ورسمنا ق ب ⊥ م أ .

فاذا رسمنا ق س // م مَ ∴ م ق̂ س حادة

لذلك ق ب يقع داخل الزاوية أ ق̂ س ، ويقابل أ أَ فى نقطة ولتكن ب نظرا لأن ق س // أ أَ

نرسم الزاوية ن ب̂ قَ = ن ب̂ ق ، ب قَ = ب ق

ونرسم قَ مَ ⊥ ن مَ

∴ ب قَ لايقابل ن مَ ، كما أنه لايوازيه

كذلك ب أَ لابد وأن يقع داخل الزاوية مَ ب̂ قَ

وهذا يعنى أن ب أَ لابد وأن يقابل مَ قَ في نقطة ما ولتكن أَ

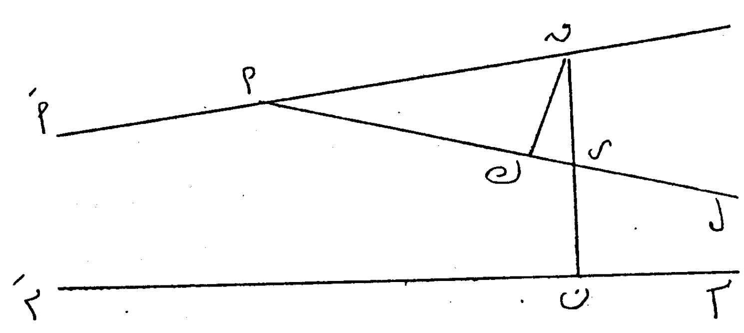
∴ مَ أَ < مَ قَ < هـ

أى أن المسافة بين المستقيمين المتوازيين تتناقص تناقصا لانهائيا .

لذلك :

المستقيمات المتوازية تقاربية فى الهندسة الزائدية ، وليست متساوية البعد كما هو الحال فى الهندسة الاقليدية .

(٨) المسافة بين مستقيمين متوازيين تزداد بلا حدود فى الاتجاه المعاكس لاتجاه التوازى .



(شكل ٣٣)

ليكن أ أَ // م مَ (كما فى ٧)

نرسم أ ل // مَ م ، (شكل ٣٣)

نرسم من نقطة ما ق واقعة على أَ أ (في الاتجاه المعاكس للتوازى)

المستقيم ق ن ⊥ مَ م يقطع أ ل فى ر ثم نرسم ق ك ⊥ أ ل .

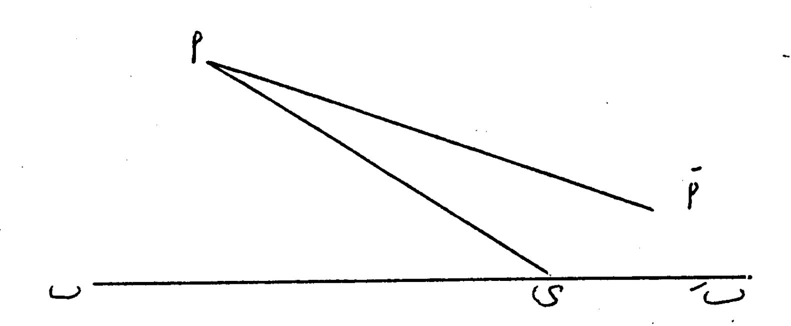
∴ ق ن > ق ر > ق ك

ولكن ق ن يمكن أن يكون أكبر من أى طول معين .

∴ ق ن يمكن أن يزيد عن أى طول معين .

∴ المسافة بين المستقيمين المتوازيين تزداد بلا حدود فى الاتجاه المعاكس للتوازى .

(٩) المستقيمان المتوازيان يتقابلان فى اللانهاية ، وتكون زاوية التقاطع تساوى الصفر . (أنظر شكل ٣٤)



(شكل ٣٤)

أ أَ // ب بَ : كلما آلت ب ى ← ∞ ، سعى أ ى الـــى الانطباق على أ أَ وآلت الزاوية $\widehat{\text{أَ أ ى}}$ ← الصفر .

ثالثا : المستقيمات غير المتلاقية (Non Intersectors)

(١٠) اذا تعامد مستقيمان على مستقيم ثالث ، فانهما لايتلاقيا ولايتوازيا وبالعكس اذا كان مستقيمان غير متلاقين وغير متوازين فانه يكون لهما عمود مشترك .

(١١) اذا كان العمود المشترك لمستقيمين غير متلاقيين مساويا للصفر ، فإن المستقيمين يتطابقان ولكن :

اذا ما تزايد العمود المشترك فى نفس الوقت ساعيا الى المالنهاية فان ، المستقيمين يتوازيان .

لذلك : فانه بالنسبة لأى مستقيمين يمكن أن يكونا :

(أ) متقابلين ، ولهما زاوية تقاطع حقيقية ولكن ليس لهما عمود مشترك.

(ب) غير متقابلين ، ويكون لهما أقصر عمود مشترك حقيقى ولكن ليس لهما زاوية حقيقية .

(حـ) متوازيين ، ويكون لهما زاوية صفرية وأقصر عمود مشترك عند اللانهاية .

ملاحظة :

(١) قبل أن تعرف مبادئ الهندسة اللا إقليدية ، كانت المستقيمات تصنف إلى : متقاربــــة (Convergent) أو متباعــــدة (Divergent) أو متساوية البعد (Equidistant) .

(٢) فى الهندسة اللا إقليدية لاوجود للمستقيمات المتساوية البعد .

(٣) المستقيمات المتلاقية تكون متقاربة أو متباعدة فى نفس الاتجاه (السمت) كما فى الهندسة الاقليدية .

(٤) المستقيمات المتوازية تكون متقاربة (Convergent) وتقاربية (Asymptotic) فى اتجاه واحد ، وتكون متباعدة فى الاتجاه الآخر .

(٥) المستقيمات غير المتلاقية تكون متباعدة الى النهاية فى الاتجاهين .

حزم وبقع المستقيمات Pencils and Bundles

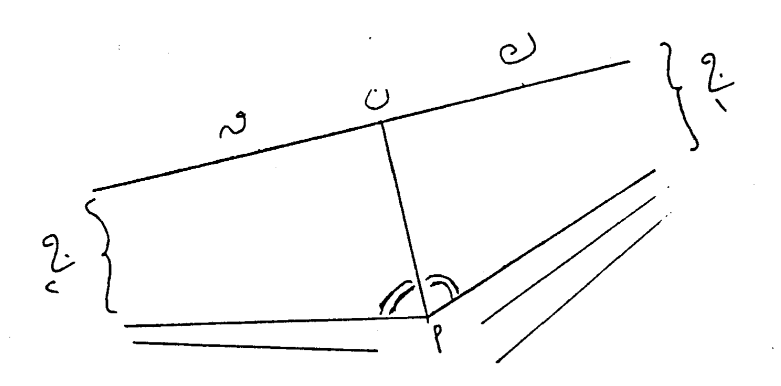
حزمة المستقيمات : تسمى منظومة من المستقيمات المستوية التى تمر بنقطة ما (و) حزمة من المستقيمات ذات رأس (و) .

البقجـــة : تسمى كل المنظومة المكونة من المستقيمات والمستويات التى

تمر بنقطة (و) فى الفضاء بقجة من المستقيمات والمستويات.

اذا كانت هناك منظومة من المستقيمات بحيث أن كلا منها يوازى مستقيما معلوما فى نفس الاتجاه (السمت) ، فانها تكون جميعها متوازية مثنى مثنى ، وتكون "حزمة " أو " بقجة " من المستقيمات المتوازية ، أو " بقجة متوازية". ويحدد ذلك تماما بواسطة مستقيم واحد له اتجاه معين .

اذا أخذنا بقجتين ج١ ، ج٢ متوازيتين فانهما يحددان مستقيما وحيدا ج١ ج٢ . ويمكن ايجاد ج١ ج٢ كالآتى : (شكل ٣٥)



(شكل ٣٥)

خذ نقطة مثل أ وعين أ ج١ ، أ ج٢ ، نصّف الزاوية ج١ أ̂ ج٢ . وارسم المستقيم أ ن بحيث يناظر طوله زاوية التوازى $\frac{١}{٢}$ ج١ أ̂ ج٢ . انشئ عمودا على أ ن مارا بالنقطة ن فى نفس مستوى ج١ أ ج٢ وليكن ق ك ، فيكون ق ك // أ ج١ ، أيضا ق ك // أ ج٢ .

رابعا : النقاط عند اللانهاية :

البقجة العادية لها نقطة مناظرة .

وأما البقجة المتوازية يكون لها اتجاه مناظر فقط .

وقد توسع الرياضيون فى مجموعة النقاط ، وذلك بأنهم قدموا مجموعة من النقاط " المصطنعة " أسموها بالنقط عند اللانهاية أو نقط اللانهاية (Infinity) وتقوم هذه النقاط بنفس الوظائف التى تستخدم بها النقاط العادية أو الحقيقية حيث تعين خطوط ومستويات فيما بينها أو بينها وبين النقط العادية .

ويوجد على كل خط مستقيم نقطتان عند اللانهاية . وتجمع نقاط اللانهاية فى المستوى عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية ، من حيث أنه اذا قطع مستقيم فانه يقطعه فى نقطتين . ويسمى هذا التجمع من نقط اللانهاية " المطلق " (Absolute) .

وعندما تقترب نقطتان (من نقط اللانهاية) من أن يتطابقا على بعضهما فان المستقيم الذي يتحدد بهما يصبح مماسا لهذا المطلق . وعندما تقترب ج١ ج٢ فى الشكل السابق فان الزاوية ج١ أ^ ج٢ تؤول إلى الصفر كلما سعى العمود أ ن الى اللانهاية .

ومن ثم فان المستقيم ج١ ج٢ يتجه الى اللانهاية ويسمى مثل هذا المستقيم مستقيم عند اللانهاية ، وبالمثل يمكن الحصول على مستويات عند اللانهاية والتى تكون مستويات مماسه للمطلق .

خامسا : الدائرة :

الدائرة هى المحل الهندسى لنقطة تكون على مسافة ثابتة من نقطة ثابتة فى المستوى وتسمى النقطة الثابتة بالمركز ، كما تسمى المسافة الثابتة نصف القطر .

تقطع الدائرة جميع أنصاف أقطارها فى زوايا قوائم . وهذا ينتج فى الوضع النهائى عندما نعتبر وترا ق ك يكون مثلثا متساوى الساقين م ق ، م ك . أى أن الدائرة عبارة عن مسار عمودى (Orthogonal trajectory) لحزمة من المستقيمات ذات رأس حقيقى .

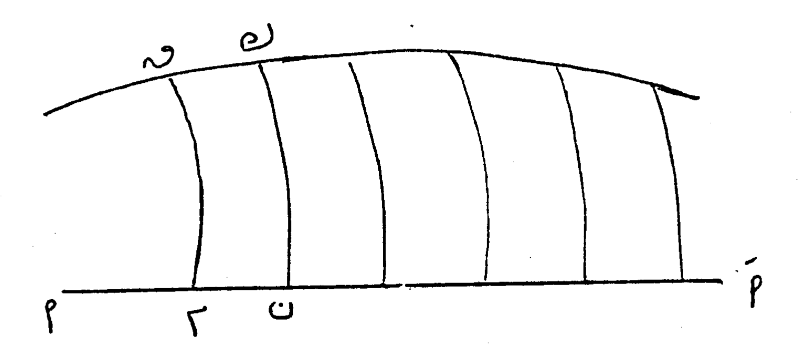
اذا ذهب الرأس الى اللانهاية ، فإن مستقيمات الحزمة تصبح متوازية ، وتأخذ الدائرة شكلا نهائيا (Limiting) والذى لن يكون خطا مستقيما ، كما هو الحال فى الهندسة الإقليدية ولكنه يكون عبارة عن منحنى منتظم ويسمى هذا المنحنى ، أى الدائرة التى نصف قطرها لانهائى ، الدائرى اللانهائى أو الهوروسيكل (Horo cycle)

(شكل ٣٦)

هذا الهوروسيكل هو المسار العمودى لحزمة من المستقيمات المتوازية . وتكون المستقيمات المتوازية العمودية على هذا الدائرى اللانهائى هى انصاف أقطاره .

وللحصول على مسار عمودى لحزمة من المستقيمات ذات رأس متطرفة اللانهاية (Ideal) ، نسير كالآتى :

(شكل ٣٧)



(شكل ٣٧)

ليكن أ أَ محورا لحزمة المستقيمات ، نرسم أعمدة على أ أَ . نأخذ مسافات متساوية مثل م ق ، ن ك ، ...... على هذه الأعمدة .

∴ المحل الهندسى للنقطة ق هو منحنى منتظم ، وليس خطا مستقيما كما هو الحال في الهندسة الاقليدية ، ويقطع هذا المنحنى كل الأعمدة عند زوايا قائمة ،

ومن ذلك يكون هذا المنحنى هو المسار العمودى المطلوب .

ويسمى هذا المسار العمودى المنحنى متساوى المسافات ، لأنه متساوى البعد عن المحور أ أَ . ويتكون المنحنى بكامله من فرعين متماثلين بالنسبة للمحور . كما أنه متماثل بالنسبة لأى من أنصاف اقطاره (العمودية علي المحور) .

وعندما يسعى المحور الى اللانهاية ، فان الأعمدة تسعى لكى تكون متوازية ويتحول المنحنى الى دائرى لانهائى (هور وسيكل) .

وبذلك يمكن المرور بدون انقطاع من حالة منحنى متساوى المسافات الى دائرة.
وعندما يذهب المحور الى المالانهاية ، فان المركز يكون هناك فى المالانهاية أيضا ومن ثم فان المحور يصبح متطرفا فى اللانهاية (Ideal) ويكون المركز حقيقيا .

لذلك فانه يوجد ثلاثة أنواع من الدوائر :

(١) دوائر صحيحة (Proper) : ذات مركز حقيقى ومحور متطرف اللانهاية .

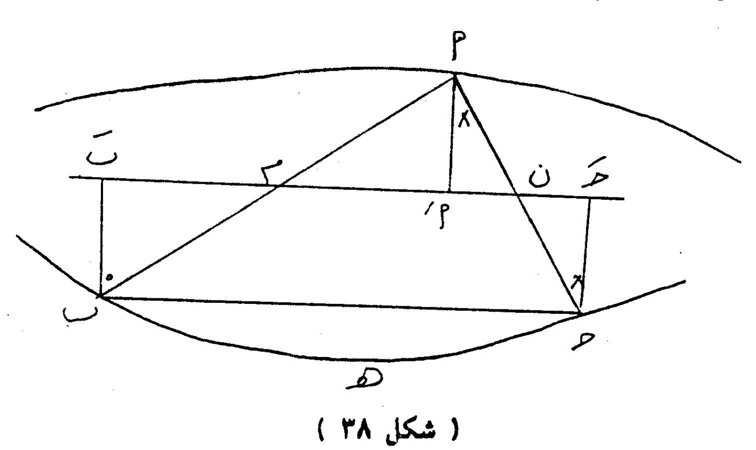
(٢) هوروسيكلات : ذات مركز ومحور كليهما فى اللانهاية .

(٣) منحنيات متساوية المسافات: ذات مركز متطرف اللانهاية ومحور حقيقى .

وعندما تختفى المسافة فى المنحنى المتساوى المسافات فان المنحنى يصبح فى الوضع النهائى خطا مستقيما (أو خطين متطابقين) .

<u>سادسا : مجموع زوايا المثلث :</u>

ليكن أ ب جـ مثلثا ، م ، ن ينصفان أضلاعه أ ب ، أ جـ (شكل ٣٨) نرسم منحنى متساوى المسافات محوره المستقيم م ن (المار بنقطتى التنصيف) ومارا برؤوس المثلث أ ، ب ، جـ .



(شكل ٣٨)

نرسم أ أَ ، ب بَ ، جـ جـَ عمودية على المحور م ن ،

لذلك فأن أ أَ = ب بَ = جـ جـَ ، بَ بـ̂ م = م أ̂ أَ ، جـَ جـ̂ ن = ن أ̂ أَ

لتكن الزاوية أ ب̂ هـ هى الزاوية التي يصنعها المستقيم أ ب مع مماس المنحنى متساوى المسافات عند ب ، الزاوية بَ ب̂ هـ قائمة . من ذلك نجد أن :

ب أ̂ جـ + أ ب̂ هـ + أ جـ̂ هـ = بَ ب̂ م + م ب̂ هـ + جـَ جـ̂ ن + ن جـ̂ هـ

= بَ ب̂ هـ + جـَ جـ̂ هـ

= ط (قائمتين)

∴ ب أ̂ جـ + أ ب̂ جـ + جـ ب̂ هـ + أ جـ̂ ب + ب جـ̂ هـ = ط

∴ ب أ̂ جـ + أ ب̂ جـ + أ جـ̂ ب + ٢ جـ ب̂ هـ = ط

∴ مجموع زوايا المثلث أ ب جـ = ط - ٢ جـ ب̂ هـ

أى أن مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين

والفرق بين القائمتين ومجموع زوايا المثلث [ط - (أ̂ + ب̂ + جـ̂)] يسمى "قصور المثلث"

ويتناسب هذا القصور مع مساحة المثلث أى أن :

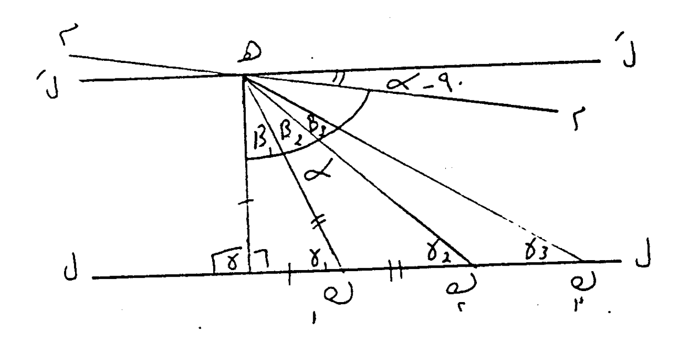
Δ = λ (ط - أ̂ - ب̂ - جـ̂)

حيث Δ تدل على مساحة المثلث ، ط = قائمتين ، أ̂ ، ب̂ ، جـ̂ هي زوايا المثلث

وتعتمد قيمة ثابت التناسب λ على وحدات قياس الزاوية والمساحة المستخدمة

مثال توضيحى :

يوجد مثلث مجموع زواياه أقل من قائمتين .



(شكل ٣٩)

البرهان : ليكن ل أى مستقيم ، هـ نقطة خارجة عنه . نرسم هـ و ⊥ ل (شكل ٣٩) ، نرسم المستقيم لَ ⊥ هـ و من هـ

فيكون لَ // ل

ولكن تبعا لمسلمة التوازى للوباتشفسكى يوجد مستقيم آخر وليكن م (غير لَ) ويكون أيضا موازيا للمستقيم ل ويمر بالنقطة هـ .

ولكن المستقيم م لايمكن أن يكون ⊥ هـ و حيث لَ ⊥ هـ و

∴ إحدى الزوايا المحصورة بين المستقيمين م ، هـ و تكـــــــون أقل من ٩٠°

ولتكن هذه الزاوية α < ٩٠°

نأخذ النقطة ك على المستقيم ل من نفس جهة القاطع هـ و بحيث :

و ك١ = هـ و

ثم نصل هـ ك١ فيكون زاوية β_1 = زاوية γ_1 نتيجة (١)

ولكن زاوية $\gamma \le$ زاوية β_1 + زاوية γ_1

بالتعويض عن β_1 بالزاوية المساوية لها γ_1

∴ زاوية $\gamma \le 2\gamma_1$ أو $\gamma_1 \ge \frac{\gamma}{2}$

ولكن $\gamma = 90^\circ$ ∴ $\gamma_1 \ge 45^\circ$

ثم نأخذ ك١ ك٢ = هـ ك١ وتصل هـ ك٢

∴ $\beta_2 = \gamma_2$ نتيجة (١)

ولكن $\gamma_1 \le \beta_2 + \gamma_2$

∴ $\gamma_1 \le 2\gamma_2$

أو $\gamma_2 \ge \frac{\gamma_1}{2}$ أو $\gamma_2 \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{2}$ أى $\gamma_2 \ge \frac{\gamma}{2^2}$

∴ $\gamma_2 \ge 22\frac{1}{2}^\circ$ وبتكرار نفس الطريقة يمكن الوصول إلى ان $\gamma_3 \ge 11\frac{1}{4}^\circ$ وهكذا .

وبعد ن من الخطوات نجد أن $\gamma_n \ge \frac{\gamma}{2^n}$ أو أن $\gamma_n \ge \frac{90}{2^n}$

، ∵ يوجد عدد طبيعى ن بحيث أن $\frac{90}{2^n}$ تكون أقل من الكمية الموجبة $90^\circ - \alpha$ مهما كانت $90^\circ - \alpha$ صغيرة

(مثلا إذا كانت $\alpha = 89^\circ$ ، $90 - \alpha = 1^\circ$ نجد أن

$\gamma_4 \ge 5{,}625^\circ$ ، $\gamma_5 \ge 2{,}8125^\circ$ ، $\gamma_6 \ge 1{,}40625^\circ$

، $\gamma_7 > 0{,}703125^\circ$

أى أن $\gamma_{7} < 1$ ، ن = ٧ (٧ خطوات تكون كافية فى هذا المثال)

∴ فى Δ و هـ كن : زاوية و $\hat{ك}_{ن}$ هـ = $\gamma_{ن} < ٩٠° - \alpha$

والآن لكل عدد طبيعى ن نجد زاوية و $\hat{هـ}$ كن $< \alpha$ لأن المستقيم م لايقابل المستقيم ل بينما المستقيم هـ كن يقابل المستقيم ل .

∴ المستقيم هـ كن يقع تحت المستقيم م

وأخيرا زاوية هـ $\hat{و}$ كن = ٩٠°

∴ مجموع زوايا المثلث و هـ كن = زاوية هـ $\hat{و}$ كن + زاويـة و $\hat{ك}_{ن}$ هـ + زاوية و $\hat{هـ}$ كن < ٩٠° + زاوية (٩٠ − α) + زاوية α

أى أن مجموع زوايا Δ و هـ كن < ١٨٠°

(وهو المطلوب)

ملحوظة : (فى مثالنا التوضيحى α = ٨٩°

∴ زاوية و $\hat{هـ}$ ك٧ < ٨٩°

γ_{7} = زاوية و $\hat{ك}_{7}$ هـ < ١° ، زاوية هـ $\hat{و}$ ك٧ = ٩٠°

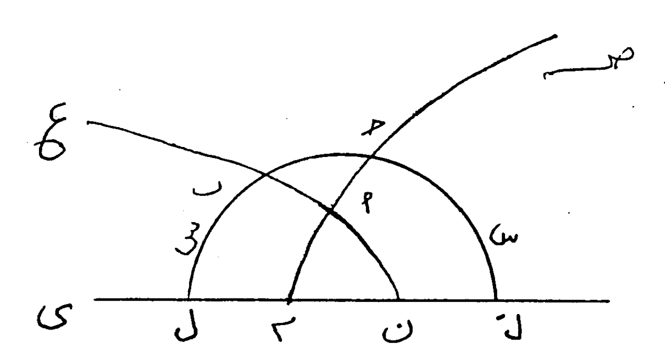
∴ مجموع زوايا Δ و هـ ك٧ يكون < ١٨٠°

بعض خواص الهندسة الناقصية الريمانية

(١) أن الخاصية الأساسية فى الهندسة الناقصية هى أن الخط المستقيم مغلق وذو طول محدود (Finite) ، وليس لانهائى الطول .

(٢) أى مستقيمين مستويين يتلاقيان دائما ، حتى ولو كان كل منهما عمودي على مستقيم ثالث .

ولتوضيح ذلك (شكل ٤٠)



(شكل ٤٠)

ليكن س ، ص ، ع ثلاثة مستقيمات مرسومة عموديا على مستقيم رابع ى عند النقاط ل ، م ، ن .

ولتكن أ هى نقطة تلاقى ص ، ع ، نقطة ب هى نقطة تلاقى س ، ع، نقطة جـ هى نقطة تلاقى س ، ص .

اذا مد المستقيم ل ب على استقامته فانه سوف يلاقي المستقيم ى فى نقطة لَ أو نقطة أخرى . لتكن لَ هى نقطة التلاقى الأولى التى يلاقى فيها س المستقيم ى ثانية . ومن ذلك ينتج مثلثات متساوية الساقين حيث يكون :

ب ل = ب ن = ب لَ

، جـ ل = جـ م = جـ لَ

∴ النقطتان ب ، جـ هما نقطتا المنتصف للقطعة المستقيمة ل ب لَ

∴ ب ، جـ لابد وأن يتطابقا .

وبالمثل فان الثلاث نقاط أ ، ب ، جـ لابد وأن تكون متطابقة

ومن ذلك يتضح أن :

جميع الأعمدة المقامة على مستقيم معلوم (وليكن ى) فى جهة واحدة تتلاقى فى نقطة واحدة أ ، وأن نقطة أ تكون متساوية البعد عن كل نقط المستقيم ى .

- تسمى النقطة أ القطب المطلق (Absolute) للمستقيم ى .
- ويسمى المستقيم ى الخط القطبى المطلق (Absolute poler) للنقطة أ .
- اذا كانت ق أى نقطة على المستقيم ى فان المسافة أ ق سمى الربعية (Quadrant) .
- تسمى النقطتان أ ، ق نقطتان مترافقتان مطلقتان .

<u>ملاحظة :</u> بالمثل تتلاقى الأعمدة المقامة على ى فى الاتجاه الآخر منه فى نقطة ولتكن أَ وهنا تبرز حالتان :

(أ) اذا كانت النقطتان أ ، أَ مختلفتين

أن ذلك يعنى أن الخطين المستقيمين يشتركان في نقطتين مختلفتين .

وفى هذه الحالة يتقاطع المستقيمان فى نقطتين المسافة بينهما تساوى ربعيتين، ويقبول هذه الفرضية تنشأ هندسة متآلفة تشابه تماما الهندسة الكرية (Spherical) حيث تمثل الخطوط المستقيمة بدوائر عظمى .

وتسمى نقطتا تقاطع المستقيمين النقاط الضد مفصلية (Antipodal).

ولابد من الاشارة هنا الى أن أى نقطتين تحددان خطا مستقيما وحيدا فيما عدا اذا كانت النقطتان ضد مفصلتين ، حيث يحدد زوج من النقط المفصلية حزمة كاملة من المستقيمات .

(ب) فى الحالة الثانية ، اذا كانت أ ، أَ تمثلان نقطة واحدة :

فى هذه الحالة فان الخطين المستقيمين يتقاطعان دوما فى نقطة واحدة ، كما أن أى نقطتين مختلفتين يحددان مستقيما وحيدا .

وهذا أيضا يُنتج نظاما هندسيا يسمى الهندسة الناقصية .

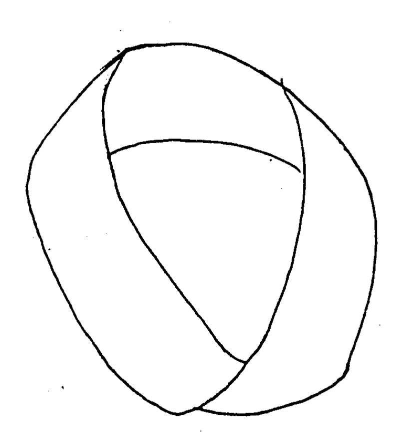
والحقيقة أنه فى بعض الأحيان فان كلا من النظامين الهندسيين الناشئين من الحالتين المشار اليهما (أ) ، (ب) تسمى هندسة ناقصية . ويميز بينهما بالاشارة الى أن واحدة منها (أ) تعرف بالصورة الضد مفصلية أو المزدوجة الصورة والأخرى (ب) تعرف بالصورة القطبية أو المنفردة . وفى معظم الحالات يقتصر المصطلح " هندسة ناقصية " على الحالة الثانية .

(٣) فى الهندسة الناقصية تكون جميع المستقيمات لها نفس الطول المحدد . والذى يساوى ربعيتين (2 Quadrants) .

(٤) المستوى في الهندسة الناقصية يختلف عن المستوى في كل من الهندسة الزائدية والهندسة الاقليدية فى خاصية هامة هى :

المستوى الناقصى لاينقسم بواسطة الخط المستقيم الى منطقتين مختلفتين .

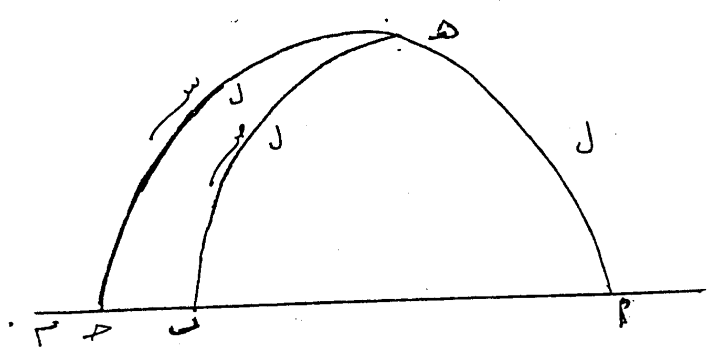
أى أن المستوى الناقصى له سطح واحد (One - Sided Surface) . وهو في ذلك يشبه بشريط موبياس التوبولوجى الذي يتكون من شريط ورقى نصف ملتو بحيث تتصل نهايتاه ، فاذا رسمنا خطا فى مركز الشريط وامتد دون انقطاع فانه يعود الى نفس نقطة البداية ، ولكن على السطح الخلفي للشريط كما بالشكل (٤١) التالى :



شريط موبياس (Möbius)

(شكل ٤١)

(٥) اذا كان س ، ص عمودين على المستقيم م . وكانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط على المستقيم م ، فان أ جـ : أ ب = أ هـ^ جـ : أ هـ^ ب ، شكل (٤٢) .



(شكل ٤٢)

فى حالة أ ب = هـ ب = ل فان أ هـ ب = $\frac{ط}{٢}$

وفى حالة أن تصبح أ هـ جـ = ٢ ط فان هـ جـ ينطبق على أ جـ .

حيث أن أ جـ : أ ب = أ هـ جـ : أ هـ ب

∴ أ جـ : ل = ٢ ط : $\frac{ط}{٢}$

∴ أ جـ = ٤ ل

وهو مابين جميع المستقيمات محدودة ولهانفس الطول كما أشرنا فى الخاصية (٣) مع ملاحظة أن الأطوال فى الهندسة الناقصية مطلقة كما فى الهندسة الزائدية .

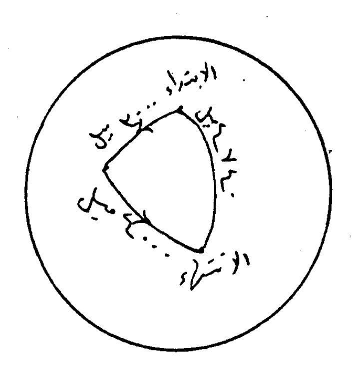
(٦) مجموع زوايا المثلث أكبر من قائمتين .

(٧) مساحة المثلث تتناسب مع زيادة مجموع زوايا المثلث عن القائمتين .

مثال تطبيقى :

اذا قطع شخص مسافة قدرها ٣٠٠٠ ميل غربا ، ٤٠٠٠ ميل جنوبا على سطح الأرض ، فان أقصر مسافة من نقطة الابتداء الى نقطة الانتهاء لاتكون

٥٠٠٠ ميل ، بل تكون حوالى ٤٧٤٠ ميل تقريبا ويمكن وصف هذا المسار كجزء من دائرة ، حيث أننا نعلم أن الأرض كروية تقريبا . ومن غير شك فان هذا المسار هو طريق الدائرة الكبرى والذي تستعمله الخطوط الجوية لشركات الطيران حتى يكون استهلاك الوقود والزمن نهاية صغرى . أنظر (شكل ٤٣)



(شكل ٤٣)

الفصل الرابع

قضية فلسفية : أى الهندسات الثلاثة صحيح ؟

ثبت وجود أكثر من نظام هندسى واحد متآلف وليس بداخله أية تعارضات أو تناقضات فيما بين خواصه والآن يتبادر الى الذهن السؤال المشروع :

" أى من هذه الهندسات صحيحة ؟ " .

مثل هذا السؤال يصبح له مايبرره ، اذا وضع في الاعتبار أن الهندسة نوع من الرياضيات التطبيقية وفرع من فروع الطبيعة الفيزيائية وأن الفضاء مفهوم تجريبى (امبريقى) وأن مسلماته ونظرياته المشتقة متناغمة وعلى اتفاق كبير مع الحقائق الخبرية . وفى نفس الوقت لايصبح للسؤال مبررا اذا اعتبرت الهندسة كيانا ذهنيا كل مايمكن القول عن صحته هو أنه اذا كانت المسلمات صحيحة فان النظريات المشتقة تكون أيضا صحيحة . فكل من الهندسات الاقليدية واللااقليدية لها نفس الصدق المنطقى . والتعاريف التى وصفتها كل من هذه الهندسات للنقطة والمستقيم والفضاء يمكن أن يكون لها تفسيرات متنوعة .

لعدة قرون كان المستوى (Plane) المتعارف عليه هو الذى صوره اقليدس فى هندسته ، وبنى الناس الهندسة كلها على هذه الصورة والتى توضح بصريا بالأشكال الهندسية المعروفة ولكن الهندسة لاتبنى على الأشكال البصرية . انها تبنى على المنطق ، فالأشكال ليست الا تصوير تخطيطى لعلاقات مجردة ليس لها أى تأثير على صدق هذه العلاقات . لذلك فانه ، من وجهة نظر المنطق ، لايوجد سبب لقبول هندسة اقليدس دون غيرها .

وأما من وجهة النظر النفعية (العملية) ، فإن هندسة اقليدس تبدو أكثر قبولا . فلمدة ألفى عام استخدم الانسان هندسة اقليدس فى دراسة الأرض والكون. وقد اثبتت هندسة اقليدس وجودها كنموذج مناسب للفضاء الفيزيائى القريب . فهندسة اقليدس كانت قادرة على وصف كل شئ من مسارات الأجسام السماوية الى أشكال وأحجام ذرات من الغبار . ولكن هل معنى ذلك أن الهندسة اللااقليدية ليست مفيدة أو ليس لها تطبيقات عملية ؟ .

لقد كان لوباتشفسكى يعتقد بأن هندسته الجديدة يمكن أن تقدم وصفا أفضل للكون ، بل كان يرى أن الهندسة علم تجريبى (Empirical) أكثر منه علم نظرى .

لقد أجرى جاوس تجربة ليحدد بها مجموعة زوايا المثلث مستخدما مثلثات رؤوسها على قمم ثلاثة جبال . ولكن التجربة لم تكن حاسمة ، فهناك أخطاء ناشئة عن التجربة وعن دقة أدوات القياس . كما أنه بالنسبة للمثلثات الصغيرة نسبيا والتى تساوى أطوال أضلاعها بضع أميال فقط يكون اختلاف مجموع زوايا المثلث عن قائمتين صغيرا جدا فى الهندسة الزائدية .

أن الظهور المفاجئ لنوع جديد من الهندسة لم يجعل الناس يبتعدون عن معتقداتهم التى دعمتها تقاليد العمل بالهندسة التى يعرفونها لمدة ألفى عام . حتى ولو كانت تلك المعتقدات لاتتواءم دوما مع مايرونه بأعينهم أو حواسهم . أن هندسة اقليدس تفترض - مثلا - بأن المستقيمات يمكن أن تمتد الى مالانهاية . ولكن من ذا الذى ركب مستقيما وأوصله فعلا الى المالانهاية ؟ كذلك ، تفترض بأن المستقيمات المتوازية لاتتلاقي ، ولكن ماذا يقول الحس البصرى عن قضبان السكك الحديدية وماذا عن أشعة الشمس المتوازية والتى تصدر عن مصدر واحد هو بالتأكيد ليس فى اللانهاية . ومن ناحية أخرى ، تفترض الهندسة الاقليدية أن الزمان

والمكان كيانان منفصلان . . . وهذا مالايعترف به أينشتاين .

أن التفسيرات المبنية على الهندسة الاقليدية للفضاء الخارجى كان يشوبها بعض العيوب التى لم تكن واضحة لرجال الفلك فى العصور المبكرة . ولكن القرن التاسع عشر شهد أوجه قصور عديدة بين ماحدث وبين ما أفرزه النظام النيوتونى من حسابات مبنية على الهندسة الاقليدية . وقد كان أكثرها وضوحا أن مسار كوكب عطارد لم يتفق مع الحسابات الرياضية التى أجريت في ذلك الحين ، كثير من هذه المشكلات جعلت الفيزياء النيوتونية ، المبنية على الهندسة الاقليدية ، تبدو على أنها مفرطة فى التبسيط فقد نظرت المنظومة النيوتونية الى الفضاء والى الزمن على أنها كيانات منفصلة مطلقة ولانهائية . فالفضاء عند نيوتن ثلاثى البعد ، والزمن كيان وحيد البعد . وقد اقتنع الناس بهذه الخواص ليست كفرضيات بل كحقائق مطلقة ، بدون منافس ، وذاتية الوضوح أى تشرح نفسها بنفسها .

وقد مر أكثر من نصف قرن بين اكتشاف الهندسة اللاإقليدية وبين تطبيقها على الفضاء الخارجى . ففى مطلع القرن العشرين بنى البرت أينشتاين منظومة الكون على أسس من هندسات لا إقليدية .

يختلف نظام أينشتاين عن نظام نيوتن فى ثلاث مجالات :

(١) الفضاء غير اقليدى .

(٢) الفضاء ليس مطلقا .

(٣) الفضاء ليس كيانا منفصلا عن الزمن .

بالنسبة لأينشتاين ، الفضاء ليس اقليديا ولاهو نظام لا اقليدى منتظم . فوجود المادة يغير خواص الفضاء بحيث أنه لايمكن وصفه بهندسة واحدة . ومعنى ذلك أن الهندسة على سطح الكرة الأرضية ليست هى الهندسة المناسبة بالضرورة

لكوكب آخر مثل الشمس . فالفضاء يتغير فى خواصه الهندسية ، كما تتغير خواص مثلثات لوباتشفسكى الكبيرة عن مثلثاته الصغيرة فالشخص الموجود على سطح الأرض اذا أراد أن يقيس مسافة معينة أو فترة زمنية على كوكب المريخ مثلا ، سوف يحصل على نتائج تختلف عن الشخص الذى يقيس نفس المسافة والزمن وهو موجود على سطح المريخ . وهذه الاختلافات ليست ناجمة عن أخطاء فى القياس ولا عن خداع بصرى ، ولكن لأن قياسات كل من الشخصين مبنية على البعد والزمن المحليين على الكوكبين المختلفين . ومع ذلك فكما أن هناك خواص لاتتغير (Invariants) فى الهندستين الاسقاطية واللااقليدية ، كذلك هناك خواص معينة تظل دون تغير فى عوالم " الزمكان " (Space - time) .

لقد حل نظام أينشتاين ذو الأربعة أبعاد محل النظام الاقليدى النيوتونى ذى الثلاثة أبعاد ، حيث البعد الرابع عند أينشتاين هو الزمن . فقد تمسك أينشتاين بأن الفصل بين الزمان والمكان هو فصل اصطناعى فرضه الانسان .

أن أحد نتائج هذا المنظور الجديد للكون هو أنه يحل محل مفهوم الجاذبية الذى قدمه نيوتن لشرح حركة الكواكب والنجوم والأشياء الساقطة من مواقع مرتفعة. وتؤكد نظرية أينشتاين أن كل الأشياء تتحرك فى خطوط مستقيمة - بالمعنى اللااقليدى . ومن ثم فانه عندما تتحرك الكواكب فى مسارات ناقصية حول الشمس ، فانها ببساطة تتحرك فى الخطوط المستقيمة الخاصة بالهندسة التى تنتمى لها . كذلك فقد قدمت نظرية اينشتاين شرحا أبسط من تلك التى قدمتها النظرية النيوتونية التى تشتمل على عديد من الاستثناءات والحالات الخاصة . ولاشك أن نظرية نيوتن أسهل فهما فى أنها يمكن تصورها . ويقول نيوتن أن الكون يعمل بنفس الطريقة التى تعمل بها الآلة ولكن منتقديه يتساءلون . . . ولكن كيف تعمل

الآلة ؟ ... وبتعبير آخر : " من يشرح الشرح ؟ " ولقد استخدم أينشتاين هندسات لااقليدية أخرى غير تلك التى أشرنا اليها وهى هندسات وضعها برنارد ريمان .

تحرير الفكر الرياضى :

أن التطور فى الفكر الرياضى الذي تمثل فى ظهور الهندسة الااقليدية ، يشابه التطور الذى طرأ على مفهوم " العلم " ذاته . فقد كان التصور أولا أن العلم حقيقة مطلقة ، ثم جاء القرن الثامن عشر ليجعل منه أسلوبا (Technique) لايجاد درجة احتمالية عالية من الحقيقة . كذلك الحال بالنسبة للهندسة ، فظهور الهندسة اللااقليدية أرجع الهندسة من موقع الحقيقة المطلقة الى موقع أقل تعاليا كخطوة فى عملية متواصلة من الكشف عن الحقيقة المحتملة ، فحررت بذلك الفكر الرياضي حيث ظهرت أعداد أخرى وأنواع أخرى من الجبر بل وكيانات رياضية جديدة . ولم تعد الرياضيات تمثل الحقيقة المطلقة . فالرياضيات أن هى الا أداة مفيدة ولها تطبيقات عديدة ومؤثرة ، ولكنها شأن أى أداة أخرى أداة من صنع البشر . ليس من الضرورى أن يناسب الكون الرياضيات التى نعرفها حاليا ، بل العكس هو الصحيح، اذ علينا أن نجعل رياضياتنا تناسب الكون . فالملاحظة والاختبار يحددان الرياضيات المناسبة تحت الظروف المختلفة لكى نجعل العالم يخضع لنظام رياضى معين .

لقد كان الاغريق يرون فى الرياضيات مرآة تعكس العالم الفيزيائى . ويرون العالم وكأنه مصنوع من نسيج رياضى ... ومازال الكثيرون يتمسكون بهذه النظرة للرياضيات . ولكن الرياضيين لم يعد لهم هذه النظرة المتعالية المثالية .

ان السؤال المطروح بين فلاسفة الرياضيات هو : " هل الرياضيات صنعت

لتناسب العالم الفيزيائى . أم هل أن الرياضيات تم صياغتها (مسبقا) ثم تم اختيار النموذج الرياضى الأفضل الذى يناسب العالم الفيزيائى ؟ " .

وبتعبير آخر : " هل بنيت مسلمات الرياضيات تماما على أشياء تجريبية (امبريقية) أو حدسية ، أم هل أن الرياضيات ابتكار عقلى بحت كمنظومة متآلفة محتواه فى ذاتيتها وغير مبنية على أشياء مادية من خارجه ؟ " .

لقد انقسم الرياضيون الحديثون حول هذا السؤال الى معسكرين :

الحدسيين (Intuitionists) والشكلين (Formalists) .

الرياضى الحدسى ، لايعتمد على الحدس فى حله للمشكلات كما توحى بذلك الصفة التى ينعت بها ، ولكنه متشدد يؤكد على أنه من المستحيل بناء نظام رياضى قوى ، متكامل ، منطقى ، ذاتى المحتوى ، وأنه لامناص من الوصول الى النقطة التى عندها نلجأ الى الحدس كأساس للمسلمات .

أما الرياضى الشكلى فهو يؤكد أن الرياضيات يمكن أن تبنى كنظام شكلي منطقى يعتمد فقط على المنطق وعلى مجموعة متآلفة من المسلمات . كما يعتقد الشكليون أن التناقضات داخل البناء الرياضى يمكن التخلص منها . وأن مفهوم الرياضيات قد تغير من أنه العلم الذى يدرس الكم والشكل الى أنه العلم الذي يشتق نتائج لزومية ، وأن هذه النتائج مبنية على أسس متينة من المنطق والعلية ، ويعارضهم الحدسيون بالقول بأن الأسس ليست فقط غير متينة بل أنها من غير الممكن أن تكون متينة ويستندون فى رأيهم هذا الى مؤشرات من فيزياء الكم بأن طريقة المسلمات ليست كافية فى بناء النماذج الرياضية .

لقد تسبب ظهور الهندسة اللا اقليدية فى انتعاش مناقشات فلسفية أخرى ، خاصة مايتعلق بنظرية أينشتاين فى النسبية ، ومن هذه القضايا قضية السبب والأثر

(Cause and effect) بمعنى أنه كل نتيجة لها سبب ، وأن السبب يسبق النتيجة ، فاذا وضع شخص يده فى النار فانها تحترق ، ولكن يده لاتحترق قبل وضعها فى النار . فالسبب (وضع اليد فى النار) لابد وأن يحدث قبل النتيجة (الاحتراق). ولكن أينشتاين يؤكد فى نسبيته أن مثل هذه الأحداث قد تظهر بترتيب مختلف بالنسبة لمشاهدين من عوالم زمكانية مختلفة . فقد يرى مشاهد فى عالم مايد الشخص تحترق قبل أن يضعها فى النار . وبالتالى فان رفض الزمان المطلق والمكان المطلق يضع قضية السبب والنتيجة موضع الخطورة . فبالنسبة لنا فانه من المستحيل للنتيجة أن تسبق السبب . ولكن هذا هو الحال في عالم النسبية الزمكانى . واذا لم يوجد سبب ونتيجة ضاعت الحتمية . وهناك سلبية مماثلة لما أصاب قضية السبب والنتيجة توجد فى عالم الكائنات الدقيقة فى فيزياء الكم .

لقد كان ابتكار الهندسة اللا اقليدية نقطة انطلاق للفكر الرياضي ومعاودة لبناء الرياضيات على أسس أكثر تماسكا وابتكار نظم رياضية جديدة عملت على وحدة الرياضيات بعد أن غيرت وعدلت ماشابها من مفاهيم تقليدية ، وقادت الى دراسة متعمقة فى أسس وفلسفة علم الرياضيات ، كما نتج عنها نمو وتطور وفهم أكثر للطرق والأساليب الرياضية . وكان من نتيجة كل ذلك التوسع فى المجالات التى تطبق فيها الرياضيات وبناء المزيد من النماذج الرياضية التى تناسب مواقف عديدة من الأنشطة العلمية والاجتماعية والاقتصادية وغيرها من المجالات الحيوية التقليدية والمستحدثة . ولاشك أن الرياضيات كانت ، بل بدأت أصلا ، لخدمة قضايا ومشكلات حياتية حيوية .. وهى تمارس نفس هذه الوظيفة ، ولكنها بفكر متطور وأكثر تحررا ، من حيث أنها تُعَدِّل دوما من بنيتها الداخلية ومتانة تماسكها كنظام متآلف منطقى ، وفى نفس الوقت تقدم النماذج المناسبة لحل العديد من

المشكلات رياضيا . فالهندسة – مثلا لم تعد تجريدا للخط الذى عرفه اقليدس بأنه " طولا بلا عرض " ولا هى عن أشعة الضوء ، ولكن مسار أشعة الضوء أو " الحافة المستقيمة " يمكن أن يكون أحد التفسيرات الفيزيائية للمصطلح الأولى غير المعرف " خط مستقيم " .

لقد ذكر برتراند رسل يوما بأن " الرياضيات هى العلم الذي لانعرف فيه مانتكلم عنه ولا ما اذا كان مانقوله صحيحا " ويقصد بالصحة هنا أنه يتحقق فيزيائيا . فالأوليات المعروفة مثل " نقطة ، " مستقيم " ، " مستوى " هى مصطلحات غير معرفة يمكن أن يحل محلها مصطلحات أخرى دون أن تتأثر النتائج المرتبطة بها . فالخاصية التى تقول بأن " كل نقطتين تحددان خطا مستقيما وحيدا " يمكن أن يحل محلها " كل تلميذين يكونان فريقا " أو " كل حرفين يكونان كلمة" وسوف تظل النظريات المبنية على مثل هذه الخاصية صحيحة لأن البرهان الرياضى يعتمد على المنطق الشكلى . أن الرياضيات تتعامل مع عبارات مثل " اذا كـــــان أ فان ب " ولكنها لاتضع فى اعتبارها وجود أ فعلا كما لاتقول لنا شيئا عن معنى أو صدق أ . أنها تعطينا قواعد اللعبة . ومثل هذه الأفكار " المتحررة " تختلف كثيرا عن الاعتقاد القديم بالحقيقة المطلقة للمفاهيم والخواص الرياضية . ويقول جرينبرج (Greenberg) من جامعة كاليفورنيا أن ذلك يعود الى اكتشاف الهندسة اللااقليدية ، وأن هذا الاكتشاف كان له تأثير كبير ، حرر الرياضيين الذين يشعرون الآن بحرية فى ابتكار مجموعة من المسلمات ويستخلصون منها مايمكنهم من نتائج لزومية منطقيا . وهذه الحرية لها الفضل الكبير فى زيادة رحابة آفاق الرياضيات وتعميماتها . فى عام ١٩٦١ ذكر الرياضى الفرنسى جان ديودينيه (Dieudonné) فى معرض حديثه عن اكتشافات جاوس للهندسة اللااقليدية : " لقد كان هذا

الكشف نقطة تحول جوهرية فى تاريخ الرياضيات ، محدثا أول خطوة فى المفهوم الجديد للعلاقة بين العالم الحقيقى (الفيزيائى) والافكار الرياضية المفترضة أنها كانت تضعه فى حسبانها . مع هذا الاكتشاف لم يعد مقبولا أن الكيانات الرياضية ماهى الا أفكار (تجريدات) لأشياء حسية ، وشيئا فشيئا أفسحت الطريق لفهم أوضح بأن الرياضيات والعالم الحقيقى (الفيزيائى) مستقلان تماما عن بعضهما .

ولابد من ملاحظة تحذيرية هامة هنا ، وهى أن الرياضيات ليست مجرد لعبة شكلية يلعب فيها الرياضى برموز وكلمات أولية دون أن يكون لها دلالات أوسع . فالرياضيون لايضعون مسلماتهم بطريقة تعسفية أو عشوائية . فليس من الممكن مثلا أن يبنى رياضى نظاما هندسيا يسلم فيه بأن " الزاويتين القائمتين غير المتجاورتين لاتتطابقان " . فالمسلمات التى يضعها الرياضى محكومة بقواعد ومعايير مثل التآلف والاستقلال وامكانية وجود نموذج يحققها ، كما لابد وأن تقود الى نتائج مفيدة ومثمرة ، حتى وان لم تظهر هذه الثمرة فى حينها ، وأن تجتذب اهتمام وبحث مجتمع الرياضيين ، حتى وإن أثارت جدلا بينهم .

الفصل الخامس

تدريس الهندسات اللااقليدية

يتناول هذا الفصل مناقشة إمكانية تدريس مقرر فى الهندسات اللااقليدية ، والمرحلة التى يمكن تدريس هذا المقرر بها . وكذلك الأهداف التى يمكن تحقيقها من تدريس هذا المقرر عندنا . فنحن نعلم أن القرن التاسع عشر يعتبر العصر الذهبى للهندسة ، ونعلم أن أحد العوامل التى ساعدت الإنسان على الوصول الى القمر كان اكتشاف بعض فروع الهندسة اللااقليدية . ومع ذلك لم تتقدم ولم تتطور مناهج الهندسة بنفس معدل التطور والتقدم فى هذا العلم . وقد قامت بعض البلدان بمحاولات لتطوير منهج الهندسة فى التعليم العام وفى كليات العلوم وكليات إعداد المعلم وبعض الكليات الأخرى ، ولكن لايزال منهج الهندسة فى التعليم العام فى كثير من الدول يحتاج إلى تطور .

وقد كتب هارولد وولف سنة ١٩٤٥ أى منذ حوالى خمسين عاما تقريبا ، يقول :

" إن الدراسة المتقدمة للهندسة الإقليدية ليست المتطلب الوحيد للتدريس الجيد لنظام إقليدس ، ولكن دراسة الهندسة اللاإقليدية بجانب الهندسة الإقليدية أمر لاغنى عنه لتحقيق ذلك * "

ثم يقول في نفس المرجع :

" من الواضح أن الدراسة الشكلية للهندسات الاإقليدية ممتعة وهامة ومفيدة ، فهذه المادة الدراسية ليست فقط قيمة ورائعــــــة

---

* Wolfe H.E. " Introduction to Non-Enclidean Geometry", Holt, Rinehart and Winston, N.Y. 1945, P. VI.

وتستحق الوقت الذى يعطى لدراستها ، ولكن ربما لايكون هناك
أى مقرر مثل هذا المقرر الذى يتضح فيه بوضوح تام طبيعة
وأهمية الهندسة بوجه خاص والرياضيات بوجه عام *

كما يذكر ألبرت أينشتاين وهو يشير إلى إحدى الهندسات اللاإقليدية (الريمانية) :

" أشعر بأهمية عظيمة لهذا النوع من الهندسة ... فلو لم أكن
على علم ودراية بهذه الهندسة ، لما استطعت أن أتوصل إلى
إكتشاف النظرية النسبية **

ومن الجدير بالذكر أنه فى مايو سنة ١٩٨٣ عقد مؤتمرا خاصا بتدريس الرياضيات فى السنوات الأولى من الجامعة ، وكان مقره المركز القومى للبحوث بالقاهرة ، وخصصت إحدى جلسات المؤتمر لمناقشة تدريس الهندسة فى الجامعة ، واقترح أحد أساتذة الرياضيات بإحدى الجامعات المصرية بتدريس مبادئ الهندسة اللاإقليدية المستوية فى المرحلة الأولى بكليات العلوم والتربية بالجامعات المصرية ***

وقد إهتم كل مؤتمر من المؤتمرات العالمية لتدريس الرياضيات **** والتى تعقد كل أربع سنوات فى بلد مختلف من بلدان العالم ، بتدريس الهندسة والفراغات

---

* Ibid, P. V.

** Greenberg,M., Euclidean and Non-Euclidean Geometries", Freeman & Company, San Francisco, 1974, P. 249.

*** مصطفى عبد الهادى ، " ورقة عمل بشأن مناهج الهندسة بالمرحلة الأولى بكليات التربية والعلوم بالجامعات المصرية والمقترحات المقدمة لتطويرها .

**** International Congress on Mathematical Educatin (ICME)

المختلفة ، حيث تفرد لجانا خاصة لمناقشة موضوعات ومشكلات تدريس الهندسة . وفى أحد هذه المؤتمرات وهو السادس ICME 6 والذى عقد فى بودابست بالمجر سنة ١٩٨٨ نظمت ندوة Symposium فى " تدريس الهندسات اللا إقليدية " . وتضمنت هذه الندوة ورقة عمل تقدم إطارا عاما مقترحا لوحدة تدريسية فى الهندسات اللاإقليدية لطلبة السنوات الأخيرة من التعليم الثانوى * .

وربما كان من الممكن إقتراح هذه الوحدة لتدريسها للطلبة المتفوقين فى الصفوف العليا من التعليم الثانوى عندنا فى مصر ، هذا لو كان عندنا نظام للاختبار بين المواد أو المقررات الدراسية ، فنطرح هذا المقرر بحيث نترك الاختيار للطلبة تبعا لميولهم أو تبعا لتفوقهم . ولكن حيث أن نظام الاختيار الواسع غير موجود عندنا الآن ، وحيث أن هذا المقرر لايطرح حتى فى كليات إعداد المعلم أو كليات العلوم عندنا مع أهميته في عصرنا هذا . ومع أن هذا المقرر يطرح ضمن مقررات دراسة الرياضيات فى معظم الجامعات الأجنبية فى العالم المتقدم ، لذلك نقترح إدخال هذا المقرر ضمن مقررات الرياضيات فى السنوات الأولى فى كليات العلوم وكليات إعداد معلم الرياضيات ، حتى تتحقق الأهداف المرجوة منه .

وحيث أننا من المهتمين بتدريس الرياضيات وبإعداد معلم الرياضيات ، وحيث أن إعداد المعلـــم وتدريبه يسبق أى تطور فى أى مقرر فى التعليم العـــام .

* Kazim, Massouma, "Non-Euclidean Geometries and Their Adoption in The School System" Procedings of ICME6, Budapest, Hungary 1988, P. 390

لذلك نقترح فى هذا الفصل إدخال هذا المقرر ضمن برامج الرياضيات بكليات إعداد معلم الرياضيات حتى يتحقق الهدف الثقافى والوجدانى للمعلم وكذلك الأهداف المعرفية والمهارية الدنيا والعليا .

وفيما يلى سنسترشد بورقة العمل التى ذكرت آنفا ، مع القيام بإدخال بعض التعديلات اللازمة عليها حتى تلائم وتناسب طلبة وطالبات كليات إعداد معلم رياضيات المرحلة الثانوية .

ويتناول الإطار العام للمقرر مايأتى :

أولا : الأهداف العامة والخاصة لتدريس هذا المقرر .

ثانيا : الإطار العام لمحتوى المقرر المقترح .

ثالثا : استراتيجية مقترحة لتدريس المقرر

رابعا : استراتيجية مقترحة للتقويم .

وفيما يلى سنتناول مكونات هذا الإطار العام بشئ من التفصيل .

أولا : نذكر هنا بعض الأهداف العامة ثم تتبعها ببعض الأهداف الخاصة والتى يمكن أن تتحقق من دراسة طلبة وطالبات كليات إعداد المعلم (أقسام الرياضيات) لمقرر فى الهندسة اللاإقليدية .

الأهداف العامة :

١ - يدرك الدارس أن هندسة إقليدس ليست هى الهندسة الوحيدة فى العالم ، ولكن هناك هندسات أخرى وفراغات أخرى .

٢ - يدرك الدارس أن إكتشاف الهندسات اللاإقليدية كان نتيجة الدراسة النظرية المنطقية المجردة المبنية على نظام المسلمات والبرهان المنطقى ، ومع ذلك

أصبحت لها تطبيقات سليمة فى مجال الطيران وفى النظرية النسبية وفى الوصول إلى القمر وبعض المجالات الأخرى .

٣ - يدرك الدارس أن الرياضيات لاتتعامل مع الحقائق المطلقة - ولكنها تعطى للرياضى الحرية لفحص وإختبار نتائج الفروض التى يختارها ، بغض النظر عن علاقتها بواقع الإدراك الحسى حوله ، وعلى هذا يدرك الدارس أن الصدق Validity هو الذى يميز الرياضيات وليست الحقيقة المطلقة .

٤ - يقدر الدارس قيمة المنطق والطرق المبنية على المسلمات والتى توصل إلى معلومات صادقة Valid ، ولايمكن الوصول إليها بالادراك الحسى أو بالحدس، ومثال على ذلك أن إكتشاف الهندسات اللاإقليدية كان نتيجة الطرق المبنية على المسلمات وعلى البرهان غير المباشر .

٥ - يكتسب الدارس بصيرة بكيفية عمل العقل الإنسانى وعمق التفكير البشرى.

٦ - يدرك الدارس أن العلم لا وطن له وأن دراسة الرياضيات والإكتشافات والابتكارات الرياضية لاتعرف التعصب ولا الدكتاتورية ، ومثال على هذا أن اكتشاف الهندسات اللاإقليدية والمحاولات التى أدت إلى هذا الإكتشاف كان بفضل علماء رياضيات من جميع بلدان العالم - فبعضهم كان من اليونان وبعضهم كان من العرب المسلمين وآخرون من إيطاليا وألمانيا وروسيا والمجر.

٧ - يشعر الدارس بعظمة وقوة العمل العقلى والجمال الداخلى حينما يتعامل مع المجردات .

٨ - يدرك الدارس كيف أن الأفكار الهندسية قد تطورت خلال السنوات الطويلة وكيف أن هذا التطور من هندسة واحدة إلى عدة هندسات ومن فراغ واحد إلى عدة فراغات قد تم ببطء . وعلى هذا يجب على المعلم وعلى التلميذ التحلى

بالصبر والإصرار والاستمرارية في مواصلة دراسة الهندسة بوجه خاص والرياضيات بوجه عام .

الأهداف الخاصة :

١ - يفهم الدارس الأساس المنطقى لنظام إقليدس ومكوناته .

٢ - يكتسب الدارس فهم وبصيرة بخصائص الهندسات الإقليدية واللاإقليدية كأنظمة منطقية مبنية على المسلمات وتعتمد على عناصر غير معرفة وتعريفات ومسلمات .

٣ - يدرك الدارس طبيعة البرهان المنطقى وطرقه وأساسياته ، ويتدرب على طرق البرهنة المختلفة .

٤ - يميز الدارس بين الثنائيات الآتية :

أ - العناصر غير المعرفة والتعريفات في نظام إقليدس .

ب - الفروض (المسلمات) والنظريات .

جـ - الاستدلال الاستقرائى والاستدلال الاستنباطى .

د - العبارات الحقيقية والعبارات الصادقة .

٥ - يستخدم الدارس الطرق المختلفة للاستدلال الاستنباطى وطرق البرهنة لإثبات النظريات والتمارين - وذلك بالطرق المباشرة وغير المباشرة .

٦ - يعرف الدارس التوازى فى كل من :

أ - الهندسة الإقليدية .

ب - الهندسة الزائدية .

جـ - الهندسة الناقصية .

٧ - يميز الدارس بين المسلمات التى تعتمد عليها كل من الهندسات الآتية :

أ - الهندسة الإقليدية .

ب - الهندسة الزائدية .

جـ - الهندسة الناقصية .

٨ - يعرف الدارس التكافؤ المنطقى .

٩ - يذكر الدارس بعض البدائل المكافئة لمسلمة إقليدس للتوازى ، مع ذكر أسباب اعتبارها مكافئة لها منطقيا .

١٠- يبرهن الدارس على بعض البدائل المكافئة لمسلمة إقليدس للتوازى .

١١- يُقَدِّر الدارس قيمة المحاولات التى قام بها علماء الرياضيات لإثبات مسلمة التوازى لإقليدس والتى إنبثق عنها إكتشاف الهندسات اللاإقليدية .

١٢- يبرهن الدارس على بعض النظريات والتمارين التى تعتمد على :

أ - مسلمة إقليدس للتوازى .

ب - كل مسلمات إقليدس ماعدا مسلمة إقليدس للتوازى (مستقلة عنها)

جـ - مسلمة التوازى الخاصة بلوباتشفسكى وبولياى .

د - مسلمة التوازى الخاصة بريمان .

١٣- يرسم الدارس بعض النماذج الخاصة بالهندسات الزائدية وبالهندسات الناقصية .

١٤- يعرف الدارس التآلف المنطقى .

١٥- يبرهن الدارس على التآلف المنطقى للهندسات اللاإقليدية .

١٦- يفرق الدارس بين الصدق والحقيقة .

ثانيا : الإطار العام لمحتوى المقرر :

يتكون الإطار العام لمحتوى المقرر من الموضوعات الآتية :

الهندسة الإقليدية وجذورها :

نظام إقليدس المنطقى ومكوناته .

الطريقة المبنية على المسلمات .

طبيعة البرهان وطرقه .

مسلمات إقليدس الأولى .

المسلمة الخامسة لإقليدس (مسلمة التوازى)

مسلمة التوازى لإقليدس :

الرياضيون الذين قاموا بمحاولات للبرهنة على مسلمة التوازى .

محاولات البرهنة على المسلمة .

بدائل المسلمة وتكافؤها منطقيا .

بعض النظريات التى تعتمد علي مسلمة التوازى .

بعض النظريات التى لاتعتمد على مسلمة التوازى .

اكتشاف الهندسات اللاإقليدية :

أعمال جاوس .

أعمال لوباتشفسكى وبولياى

أعمال ريمان

الهندسة الزائدية :

مسلمة التوازى الخاصة بهذه الهندسة .

نموذج بلترامى لهذه الهندسة .

نموذج كلاين .

بعض النظريات التى تعتمد على مسلمة التوازى الخاصة بهذه الهندسة .

الهندسة الناقصية :

مسلمة التوازى الخاصة بهذه الهندسة .

نموذج بلترامى لهذه الهندسة .

بعض النظريات التى تعتمد على مسلمة التوازى الخاصة بهذه الهندسة .

تآلف الهندسات اللاإقليدية وعدم تناقضها .

دراسة بعض التطبيقات العملية الخاصة بكل هندسة من الثلاث هندسات .

ثالثا : الاستراتيجية المقترحة لتدريس المقرر :

يقترح أن تكون الطريقة المتبعة فى تدريس هذا المقرر بعيدة عن طريقة المحاضرات وإعطاء المذكرات ، ولكن تعتمد على استعمال المكتبة وإطلاع الدارسين على المراجع بأنفسهم ، ثم مناقشة مايقرأونه .

فعند إبتداء المقرر يبدأ الاستاذ بمناقشة الدارسين فى أهداف المقرر ثم يعطى لهم قائمة بالأهداف الموجو تحقيقها من المقرر ومحتوى المقرر وخطة العمل فيه وقائمة بالمراجع . وبعد كل درس يعطى لهم ورقة عمل للدرس الذي يليه وفيه يحدد موضوع الدرس وقائمة بالمراجع المناسبة للموضوع ويطلب منهم إعداد هذا الدرس وذلك عن طريق الإطلاع فى المراجع ، ثم الإجابة على الأسئلة التى فى ورقة العمل وحل التمارين المطلوبة . ثم يتبع هذا مناقشة عامة لموضوع الدرس وعناصره ومناقشة أوراق الدارسين والتمارين والأسئلة وذلك فى الوقت المخصص للدرس .

بالإضافة إلى ذلك يكلف الدارسون بكتابة موضوعات يعدونها بأنفسهم وتناقش هذه الأوراق مع الأستاذ والزملاء من الطلبة .

أى تتلخص الطريقة فى دراسة موضوعات المقرر من المراجع ومناقشتها وكتابة التقارير والأبحاث وحل المسائل والتمارين والأسئلة المطلوبة ، وكذلك القيام بالبرهنة على بعض النظريات والتمارين لإثبات بعض الخواص الهندسية فى الهندسات الثلاث ، الإقليدية والزائدية والناقصية . وكذلك القيام برسم وعمل بعض النماذج لهذه الهندسات وتقديم بعض الأبحاث عن بعض التطبيقات الخاصة بالهندسات الإقليدية واللاإقليدية .

رابعا : الاستراتيجية المقترحة للتقويم

التقويم المقترح لهذا المقرر يعتمد على التقويم المستمر لجوانب التدريس المختلفة وفيما يلى بعض الأساليب الخاصة لتقويم الدارسين فى هذا المقرر وهى :

١ - التقويم المستمر أثناء مناقشة الدارسين لما يعدونه من موضوعات.

٢ - التقويم المستمر لما يقومون به من حل تمارين والقيام بالبرهنة بالطرق المختلفة .

٣ - التقويم المستمر لما يقومون به من رسم وعمل بعض النماذج للهندسات المختلفة .

٤ - تقويم الأبحاث والتقارير والأوراق التي يقوم بها الدارسون .

٥ - اختبارات موضوعية فى محتوى المقرر بعد الإنتهاء من كل موضوع من موضوعات المقرر .

٦ - اختبارات فى مستوى حل المشكلة للتأكد من قدرة الدارسين على التفكير .

٧ - إختبار نهاية العام أو نهاية الفصل الدراسى ويتكون من شقين ، أحدهما يتكون من أسئلة موضوعية والشق الآخر يتكون من أسئلة مقالية ومسائل .

وفيما يلى قائمة بالمراجع التى يمكن أن يسترشد بها أستاذ هذا المقرر ، والتى يستطيع أن ينتقى منها مايناسب طلبته وطالباته . وهى فى نفس الوقت تشتمل علي مراجع هذه الدراسة .

المراجع العربية

معصومة كاظم وآخرون " أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة " دار المعارف بمصر ، الطبعة الثانية ، سنة ١٩٧٠ .

المراجع الأجنبية

1. Al-Daffa, A.A. & Stroyls, J. Nasir al-Din al-Tusi's Attempt to Prove the Prallel Postulate of Euclid, University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia.

2. Blumenthal, L.M., A Modern View of Geometry, W.H. Freeman & Co. San Francisco.

3. Bunt, Locas, N.H. Equivalent Forms of Parallel Axiom, The Mathematics Teacher, Vol. 40 (1967), pp. 641-652.

4. Bunt, Lucas, Jones, Phillip S. and Bedient, Jack D. The Historical Roots of Elementry Mathematics, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1976.

5. Butler, C. H. Wren F.L. & Banks, J.H. The Teaching of Secondary Mathematics, McGraw-Hill, 1970.

6. Courant, R. and Robbins, H. What is Mathematics? Oxford University Press, 1947.

7. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, Inc. N.Y. 1969.

8. Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, Holt, Rinehart & Winston, Inc. New York, 1969.

9. Eves, E. & Newsom, An Introduction to the Foundation and Fundamental Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart, N.Y. 1958.

10. Fehr, Fey & Hill, Unified Mathematics, Course II, Addison, Wesley, Publishing Co. California, 1972.

11. Greenberg, M.J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Dev. and History. W. H. Freeman & Co. San Francisco, 1974.

12. Kline, M. Mathematics in Western Culture, Oxford University Press, 1953.

13. Meserve, B. Fundamental Concepts of Geometry, Addison-Wesley Pub. Company, Mass, 1955.

14. Muir, of Men and Numbers, Laurel Science Series, Washington, D.C., 1950.

15. N. C. T. M., 23rd Yearbook, Insight into Modern Mathematics, 1958, N.C.T.M. Washington D.C.

16. N. C.T.M., 24th Yearbook, The Growth of Mathematical Ideas, 1959, N.C.T.M. Washington, D.C.

17. N. C. T. M., 27th Yearbook, Enrichment Mathematics, 1963, N.C.T.M., Washington D.C.

18. N. C. T.M., 33rd Yearbook, The Teaching of Secondary School Mathematics, 1970, N.C.T.M., Washiongton, D.C.

19. N. C.T.M., 36th Yearbook, Geometry in the Mathematics Curriculum, 1973, N. C. T. M. Virginia.

20. Sommerville, D. M. The Elements of Non-Euclidean Geometry, Dover, N. Y., 1958.

21. Todhunter, Isaac, The Elements of Euclid, London, J.M. Deut & Sons, 1948.

22. Wilder, R.L. Introduction to the Foundations of Mathematics. John Wiley & sons, 1965.

23. Wolfe, H.E. Introduction to Non-Euclidean Geometry, Holt, Rinehart & Winston, N.Y. 1945.

A Film

Non-Euclidean Universe, V. C. 279, Open University Educational Enterprises, 12, Cofferidge Close Stony Stradford,Milton, Tyens, MK11, 1py, England.

رقم الإيداع ٥٧٩٨ / ٩٣
الترقيم الدولى I.S.B.N
977 -04-5993 -6